كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٤

المحاضرة : الثالثة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمرين 1 لتكن (U_n) متتالية عددية معرفة حدها الأول $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$U_{n+1}=1-\frac{9}{U_n+5}$$

المطلوب

1- برهن بالتدريج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $U_n > -2$

2- بين أن U_n متتالية متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n $V_n=\frac{1}{U_n+2}$

أ- أثبت أن المتتالية V_n هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ويطلب حدها الأول

واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

الحل: 1- من أجل $n=0$ أي $U_0=1$ نرى أنه فعلاً $U_0 > -2$ وبالتالي من أجل $n=0$ $U_n > -2$

نفرض أن من أجل كل عدد طبيعي n $U_n > -2$ صحيحة ولنبرهن صحة $U_{n+1} > -2$

لدينا من الفرض $U_n > -2$

$$U_n+5 > -2+5$$

$$U_n+5 > 3$$

$$\frac{1}{U_n+5} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{-9}{U_n+5} > -\frac{9}{3}$$

$$\frac{-9}{U_n+5} > -3$$

$$1 - \frac{9}{U_n+5} > -2$$

إذاً من أجل كل n من $\mathbb{N}$

$\Rightarrow U_{n+1} > -2$

وإذاً $U_n > -2$

بالتالي محققة

2- ليبرهن أن U_n متتالية متناقصة تماماً يكفي أن نبرهن أن $U_{n+1} - U_n < 0$ حيث أن $U_n > -2$

$$U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{9}{U_n+5} - U_n = \frac{U_n+5-9-U_n^2-5U_n}{U_n+5}$$

$$= \frac{-U_n^2-4U_n-4}{U_n+5} = \frac{-(U_n^2+4U_n+4)}{U_n+5}$$

$$= -\frac{(U_n+2)^2}{U_n+5}$$

وهنا نلاحظ أن المقام لذلك لينا $U_n > -2$ نضيف الحدين 5 +

$U_n+5 > 3 > 0$

وهنا المقام موجب لأن $(U_{n+1})^2 > 0$

بالتالي نجد أن $U_{n+1} - U_n < 0$

وهنا المتتالية (U_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بما أن (U_n) متقاربة تماماً على (N) ووجودة في الأسئلة بالعدد (2) وهي متقاربة.

3- لتكون المتتالية (V_n) متتالية حسابية يكفي أن نبرهن أن $V_n = \frac{1}{U_n + 2}$

$$V_{n+1} = V_n + r$$

لدينا

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} + 2} = \frac{1}{1 - \frac{9}{U_n + 5} + 2}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3 - \frac{9}{U_n + 5}} = \frac{1}{\frac{3U_n + 5 - 9}{U_n + 5}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3U_n + 6}{U_n + 5}} = \frac{U_n + 5}{3U_n + 6}$$ نخرج الكل $$= \frac{U_n + 2 + 3}{3(U_n + 2)}$$

$$= \frac{U_n + 2}{3(U_n + 2)} + \frac{3}{3(U_n + 2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{U_n + 2}$$

$$= V_n + \frac{1}{3} \Rightarrow V_{n+1} = V_n + r$$

ومنه V_n متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$

وهذا هو حدها الأول

$$V_n = \frac{1}{n_0 + 2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{3}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حساب $\lim_{n \to \infty} U_n$

نهاية متتالية هي نفسها نهاية جامع المتتالية الجزئية

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} \left(-2 + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}n} \right)$$

متتالية المجاميع الجزئية

$$= -2 + 0 = -2$$

ومنه

$$\lim_{n \to \infty} U_n = -2$$

تمرين 2

كل المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$ أو $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$

a: حدها الأول — مجموع المتسلسلة الهندسية $S = \frac{a}{1-a}$

تكون السلسلة متقاربة إذا كان

$-1 < r < 1$ وتكون عندها المتسلسلة متقاربة

بين فيما إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2} \cdot 4^{n+1}$ هندسية ثم أوجد

أساسها وحدها الأول ومجموعها

واستنتج أنها متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-(n-2)} \cdot 4^{(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{9^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1+2}}{9^{n-1-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} \cdot \frac{4^2}{9^{-1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot 4^2 \times 9 =$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 144 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

ومنه هذه السلسلة هي متسلسلة هندسية

حيث $a = 144$ و $r = \frac{4}{9} < 1$

مجموعها $S = \frac{144}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5} \times (144)$

$$S = \frac{1296}{5}$$

تمرين 3: استخدم المثال أعلاه لإيجاد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 9^{-n+2} \cdot 4^{n+1}$

$$= 9^2 (4) + \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2} \cdot 4^{n+1}$$

$$= 324 + \frac{1296}{5} = \frac{2916}{5}$$

وظيفة: لتكن f دالة معرفة على المجال $[0, \infty[$ حيث

$$f(x) = \frac{5x}{x+2}$$

1. أحسب $\lim_{x \to \infty} f(x)$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. هل المتتالية $U_n = \frac{5n}{n+2}$ محدودة (استنتج).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة