كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٤

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

متتالية المجاميع الجزئية:

يفرض لدينا متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

نعرف متتالية المجاميع الجزئية S_n بالشكل

$S_0 = U_0$

$S_1 = U_0 + U_1$

$S_2 = U_0 + U_1 + U_2$

$U_n = U_0 + U_1 + U_2 \text{———} + U_n$

متتاليات كوشي:

لتكن متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ نقول أنها كوشي إذا حققت الشرط

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in IN ; |U_n - U_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0$$

مبرهنة: كل متتالية متقاربة هي متتالية لكوشي

البرهان: بفرض $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من a

لنبرهن أن U_n تحقق شرط كوشي بسبب التقارب

نجد

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in IN ; |U_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

لأن $\forall\ n,m > n_0$

$$|u_n - u_m| = |u_n - a + a - u_m| < |u_n - a| + |a - u_m| < 2\varepsilon = \varepsilon'$$

العكس صحيح في الفضاءات التامة وهنا دراستنا في $\mathbb{R}$ وهو تام ومنه كل متتالية لكوشي في $\mathbb{R}$ هي متتالية متقاربة أيضاً.

السلاسل العددية :

بفرض $(a_n)_{n\geq 0}$ متتالية ما إن مفهوم السلسلة هو بالعلاقة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

تقارب السلاسل : نقول عن سلسلة أنها متقاربة إذا كانت نتيجة مجموع السلسلة عدداً محدوداً.

ملاحظة : تتباعد السلسلة إذا كانت المجموع $= \infty$
أو إذا كان المجموع غير موجود

علاقة السلاسل بمتتاليات المجاميع

لكل سلسلة متتالية مجاميع $\sum_{n=1} a_n$ سلسلة لها متتالية

مجاميع جزئية $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

مثال: ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$$

أوجد مجموعها

الحل: نفرق الكسر

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \Rightarrow a(n+1) + b\,n = 1$$

نفرض $n=-1 \Rightarrow b=-1$

$n=0 \Rightarrow a=1$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

← متتالية المجاميع الجزئية:

$$S_n = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\cdots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

وهي متقاربة

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$$

مثال: أوجد مجموع

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

الجواب: $\frac{1}{6}$

* السلسلة الهندسية: الشكل العام لها

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n$$

درسنا سابقاً أنه عندما $|q| < 1$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots aq^n = a[1 + q + \dots q^n] = a\frac{1-q^{(n+1)}}{1-q}$$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

سلسلة متقاربة

ملاحظة: السلسلة الهندسية

$|q| < 1$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$ متقاربة

ويختلف مجموعها عن المثال السابق

$$S_n = aq + aq^2 + \dots aq^n = a[q + q^2 + \dots q^n]$$

$$= a\left[q\frac{1-q^n}{1-q}\right]$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a.q}{1-q}$$

مثال: ادرس تقارب $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

الحل:

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftarrow$ السلسلة هندسية

$|q| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$ متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

م.