كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الرابعة

المادة : الكترونيات نانوية

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

# الانتقال الإلكتروني في أنصاف النواقل والتراكيب النانوية
# Electron Transport in Semiconductors and Nanostructures

## 1-6 مقدمة: Introduction

درسنا في **مقرر علم النانو** التحسينات التي طرأت على إنماء مواد التراكيب النانوية وتصنيعها. وفي حالة الإلكترونات ركّزنا في المقام الأول على تكميّة Quantization طاقاتها في التراكيب النانوية. في الواقع، يعتمد علم الإلكترونيات على الإشارات الكهربائية، فهو يتعامل مع قياسات التيار والجهد الكهربائيين. وتكمن الوظائف الأساسية **للنبائط الإلكترونية** في ضبط الإشارات الكهربائية ومعالجتها. وستتركز دراستنا في هذا الفصل على **نقل حاملات الشحنة الكهربائية التي تُعدُّ مسؤولةً عن التيارات الكهربائية المتدفقة في التراكيب النانوية**.

ترتبط نُظم النقل الممكنة للإلكترونات بالعديد من **البارامترات** (المتحولات) والعوامل؛ يمكن شرح وتوضيح بعض الأوجه المهمة لهذه النُظم من خلال مقارنة **مقاييس** الزمن والطول لحاملات الشحنة مع أبعاد **النبيطة** والظواهر الزمنية **للنبائط** المرتبطة بالترددات العاملة فيها.

- يُجرى مثل هذا التحليل في الفقرة 6-2.
- ونناقش في الفقرتين 6-3 و 6-4 دور إحصاء الإلكترونات في مفاعيل نقلها.
- ثم ندرس سلوك الإلكترونات بوجود حقل كهربائي كبير بما في ذلك ما يسمى **بمفاعيل الإلكترونات الحارة** *Hot-Electron Effects*. وعند تحليل النبائط القصيرة جداً نَصِفُ النقل الإلكتروني التبددي Dissipative Transport **ومفعول السرعة تجاوز السرعة (العابرة)** *Velocity-Overshoot Effect*.
- وأخيراً، سندرس في الفقرة 6-5 الحركة القذفية (الباليستية) نصف التقليدية للإلكترونات ونعرض أفكاراً حول النقل الكمومي في النبائط النانوية.

## 2-6 مقاييس الزمن والطول للإلكترونات في الأجسام الصلبة:
## Time and Length Scales of the Electrons in Solids

نبدأ بتحليل نُظم النقل الممكنة للإلكترونات في التراكيب النانوية؛ وطالما يوجد عدد كبير من نُظم النقل، فإننا نعرض تصنيفها بدلالة أزمنةٍ وأطوالٍ مميزةٍ مُلازمةٍ أساساً للحركة الإلكترونية.

### 1-2-6 الأطوال الإلكترونية الأساسية في الأجسام الصلبة Electron Fundamental Lengths in Solids:

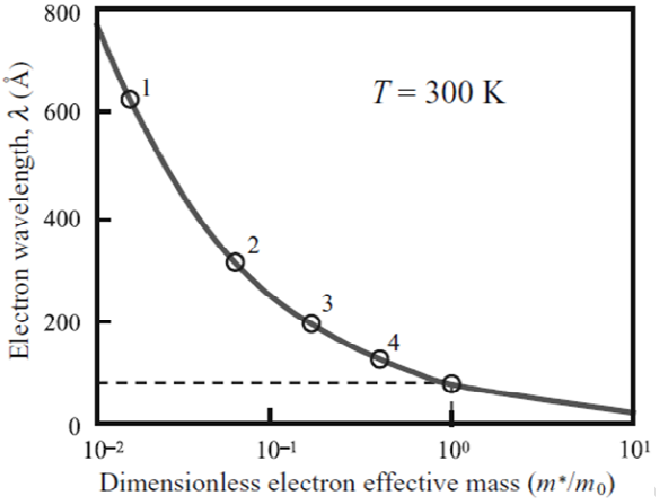
لقد ذكرنا في مقررات الحالة الصلبة أن الطول المميز في الجسم الصلب المتبلور هو **ثابت الشبكة البلورية** $a_0$ ولكن المقاييس ذات الصلة بحاملات الشحنة– عادةً– أكبر بكثير من $a_0$؛ إن هذه الحقيقة تسمح لنا بإهمال البنية البلّورية الدقيقة Fine Crystalline Structure ودراسة **الإلكترون فيها** وكأنه جسيم حر تقريباً، وذلك من خلال تعيين كتلة فعالة للإلكترون يمكن **أن** تختلف عن كتلته في الخلاء.

يُعدُّ **طول موجة دوبروي** *De-Broglie Wavelength* لإلكترونٍ متوفّرٍ في جسمٍ صلبٍ **الطول الأكثر أهمية**؛ فمن أجل إلكترونٍ في بنية نانوية نصف ناقلة كتلته الفعالة $m^*$ يكون طول موجة دوبروي $\lambda$ **عادةً** أكبر منه من أجل إلكترونٍ حرٍ $\lambda_0$:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m^*E}} = \lambda_0\sqrt{\frac{m_0}{m^*}}\,; \qquad \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E}}, \tag{1-6}$$

حيث $E$ طاقة الإلكترون و $m_0$ كتلة الإلكترون في الخلاء.

يوضح الشكل (1-6) تابعية قيمة $\lambda$ للنسبة $m^*/m_0$: تُشير النقاط من 1 إلى 4 الظاهرة على المنحني للأطوال الموجية من أجل الإلكترونات في InSb، و GaAs، و GaN، و SiC، على الترتيب. لقد استخدمنا من أجل هذه المواد الكتل الفعالة، $m^*/m_0$، المساوية (0.014)، و (0.06)، و (0.172)، و (0.41)، على الترتيب؛ وافترضنا أن طاقة الإلكترون تساوي $E = k_BT$، حيث $T = 300\text{K}$ درجة حرارة الوسط المحيط و $k_B$ ثابت بولتزمان.




**الشكل (6-1): علاقة طول الموجة الإلكترونية بالكتلة الفعّالة في درجة حرارة الغرفة؛ تشير النقاط 1 و 2 و 3 و 4 إلى المركبات InSb و GaAs و GaN و SiC**

**الجدول (4-8): ثوابت الشبكة البلّورية من أجل مواد نصف ناقلة تكعيبية في درجة الحرارة 300 K**

| Semiconductor | Lattice constant (Å) |
|---|---|
| SiC | 3.0806 |
| C | 3.5668 |
| Si | 5.4309 |
| GaP | 5.4495 |
| GaAs | 5.6419 |
| Ge | 5.6461 |
| AlAs | 5.6611 |
| InP | 5.8687 |
| InAs | 6.0584 |

نلاحظ أن **طول موجة دوبروي** للإلكترون في أنصاف النواقل النموذجية ذات الكتلة الفعّالة $m^*$ الواقعة في المجال $(0.01-1)m_0$ **يساوي** $(730-73)\,\text{Å}$، أي إنه فعلاً أكبر بكثير من ثابت الشبكة البلورية من أجل المواد المُدرجة في الجدول 4-8. **وحالما تنخفض درجة الحرارة إلى** 3 K **يزداد طول موجة دوبروي بمقدار مرتبة واحدة** (أي بمقدار عشر مرات). وهكذا يُصبح الطول الموجي قريباً من أبعاد تراكيب ونبائط نصف ناقلة تم تحصيلها بتكنولوجيا التصنيع النانوية الحديثة.

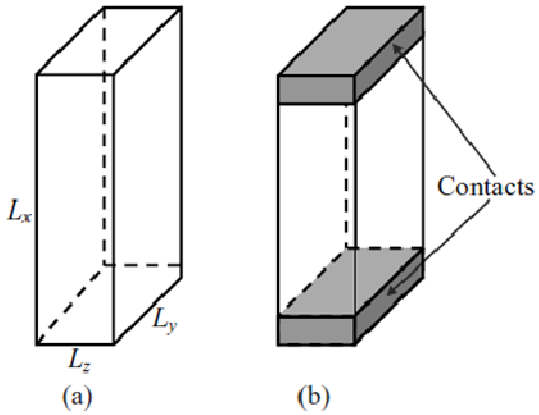
### 6-1-2 أبعاد النبيطة وتكميّة الطيف الإلكتروني:

**Size of a Device and Electron Spectrum Quantization**

لنُدخل بعداً هندسياً لعينة نصف ناقلة $L_x \times L_y \times L_z$، كما يوضح الشكل (2-6) تخطيطياً:

**ولنفرض أنَّ** $L_z < L_y < L_x$؛ **فإذا كانت الجملة خالية** من العشوائية (أي منتظمة)، وآليات التبعثر Scattering الأخرى ضعيفةً كفايةً (أي المطعِّمات والشوائب والعيوب قليلة جداً لدرجة الإهمال)، **تكون** الحركة الإلكترونية **شبه باليستية** Quasi-ballistic والطول الوحيد الواجب مقارنة الأبعاد الهندسية به هو **طول موجة دوبروي** $\lambda$

**فقط**. وبما أنّ عدداً صحيحاً فقط من أنصاف أمواج الإلكترونات يمكن أن يلائم أي جملة **محدودة**، فبدلاً من طيف طاقي مستمر وعدد مستمر من الحالات الإلكترونية يتم الحصول على مجموعة حالات إلكترونية ومستويات طاقة متقطعة توصَّف كل منها بعدد مناسب من أنصاف الأطوال الموجية. وهذا ما يُعزى إلى ما يسمى **بتكميّة الحركة الإلكترونية** *Quantization of Electron Motion* عادةً.




**الشكل (2-6): (a) الأبعاد الهندسية لعينة نصف ناقلة $(L_z < L_y < L_x)$ و (b) لعينة نصف ناقلة بوجود تماسات توصيل تيار كهربائي؛ يحدث الانتقال الإلكتروني على طول الاتجاه $x$.**

وتبعاً لأبعاد الجملة المدروسة يمكن التمييز بين الحالات الآتية:

**(a) الحالة ثلاثية البعد** أو الحالة شبه الحجمية؛ عندما لا تكون تكميّة الطيف الإلكتروني مهمة على الإطلاق، **فإن طول موجة دوبروي يكون أقل بكثير من أبعاد النبيطة كافةً**:

$$\lambda << L_x, L_y, L_z, \qquad (2\text{-}6)$$

ويسلك الإلكترون عندها سلوكاً مشابهاً لسلوك جسيم حر يتصِّف بكتلة فعالة $m^*$.

**(b) الحالة ثنائية البعد** أو حالة **بئرٍ كمومي**؛ عندما تحدث تكميّة الحركة الإلكترونية في اتجاه واحد في حين إنّ الحركة الإلكترونية في الاتجاهين الآخرين حرة، فإن طول موجة دوبروي يكون مساوياً لسماكة **النبيطة** تقريباً ولكنه أصغر بكثير من بعديها الآخرين (طولها وعرضها، مثلاً):

$$\boxed{\lambda \cong L_z << L_y, L_x .} \qquad (3\text{-}6)$$

لقد تمت مناقشة مثل هذه الحالة في مقرر الفيزياء الكمومية عند دراسة مثال طاقة كامنة مرتبطة بإحداثية وحيدة. إذْ تُعطى الطاقة الإلكترونية من أجل هذه الحالة على شاكلة **عصابات طاقية جزئية ثنائية البعد**.

**(c) الحالة أحادية البعد** أو حالة سلك كمومي؛ عندما تحدث تكميّة الحركة الإلكترونية في اتجاهين بحيث ينتقل الإلكترون بشكل حر فقط في اتجاه وحيد– على طول **السلك**، فإن طول موجة دوبروي أصغر بكثير من طول **النبيطة** ويكون من مرتبة البعدين الآخرين:

$$\boxed{L_z \cong L_y \cong \lambda << L_x .} \qquad (4\text{-}6)$$

تمت مناقشة مثل هذه الحالة في مقررات أخرى عند دراسة مثال طاقة كامنة مرتبطة بإحداثيتين. إذْ تُعطى الطاقة الإلكترونية من أجل هذه الحالة على شاكلة **عصابات طاقية جزئية أحادية البعد**.

**(d) الحالة صفرية البعد** أو حالة صندوق كمومي (**نقطة كمومية**)؛ عندما تحدث تكميّة الحركة الإلكترونية في الاتجاهات كافة وليس بمقدور الإلكترون الانتقال بحرية في أي اتجاه، فإن طول موجة دوبروي يكون من مرتبة أبعاد **النبيطة** كافة:

$$\boxed{L_x \cong L_y \cong L_z \cong \lambda .} \qquad (5\text{-}6)$$

وقد تم تحليل النماذج المبسطة من أجل هذه الحالة أيضاً في مقررات أخرى. وكان **الطيف الطاقي متقطعاً**.

توضح الحالات الثلاث الأخيرة أيضاً **مفعول تكميّة الأبعاد** *Quantum Size*؛ في بعدٍ واحدٍ، وبعدين، وثلاثة أبعاد على الترتيب: فإذا كان بعد هندسي واحد على الأقل لنبيطةٍ أو جملةٍ مساوياً تقريباً لطول موجة الإلكترون فلا بد من معالجة كموميّة حتمية للمسألة المطروحة.

**لنحلل الآن** الأسباب والظروف التي **تجعل حاملات الشحنة تفقد سلوكها الشبيه بالموجة** بحيث يمكن دراستها كجسيمات عادية (تقليدية)؛ ثمة سببان رئيسان لذلك:

**السبب الأول** هو **عدم مثالية** الجملة الذي يؤدي إلى التبعثر الإلكتروني،

**والسبب الثاني مرتبط بدرجة الحرارة المحدودة** للجملة **وإحصاء الإلكترونات**.

في الواقع، فيما يخصّ **السبب الأول** تخضع الإلكترونات في نبائط الحالة الصلبة **للتبعثر** على:

- العيوب البلورية، والشوائب، واهتزازات الشبكة البلورية،
- وخشونة السطح الفاصل، الخ.

إذْ تُقسَّم عمليات التبعثر هذه إلى مجموعتين: مجموعة **تبعثر مرن** ومجموعة تبعثر **غير مرن**.

في **الفيزياء التقليدية** يؤدي الاصطدام **المرن** إلى تغيرٍ في كمية حركة (اندفاع) الجسيم **فقط** (أو في المتجه الموجي للجسيم)، في حين إنَّ الاصطدام **اللامرن** يؤدي إلى تغيرٍ في اندفاع الجسيم وفي طاقته. **ثمة خاصية جوهرية للاصطدام المرن تكمن في كونه لا يُخرِّب طور الإلكترون المتمثِّل في مصونية طاقته واندفاعه.**

**أولاً–** في الواقع، بعد تبعثرٍ مرنٍ تبقى الطاقة مصونة ولا تتغير ويتألف التابع الموجي $\Psi(\vec{r},t)$ من مركبات مختلفة تأخذ الشكل $e^{i\vec{k}_j\cdot\vec{r}}\ e^{-i\Omega t}$.

وتمتلك كل المركبات **نفس الطور** المتعلق بالزمن $e^{-i\Omega t}$. ولذلك، فإن **التوزّع المكاني للكثافة الإلكترونية** $|\Psi(\vec{r},t)|^2=|\Psi(\vec{r})|^2$ **يبقى مستقلاً عن الزمن**.

بتعبيرٍ آخر، **التبعثر المرن لا يُخرّب ترابط الحركة الإلكترونية** *Coherence*.

يمكننا باستعمال لغة الفيزياء شبه التقليدية تعيين **المسار الحر الوسطي** *Mean Free Path* للإلكترونات بين حوادث **التبعثر المرن** بالعلاقة: $\boxed{l_e=\tau_e\,\upsilon}$

حيث $\tau_e$ الزمن الوسطي بين حادثتي تبعثرٍ مرنٍ و $\upsilon$ السرعة الوسطية للإلكترون.

ولذلك، حتى من أجل مسافات تتجاوز $l_e$، تكون الخصائص شبه الموجية للإلكترونات **مترابطة**.

**ثانياً–** يؤدي **التبعثر اللامرن** إلى نتيجة مغايرة لما سبق؛ حيث **يولّد** هذا **التبعثر أمواجاً إلكترونية بطاقات مختلفة ويمتلك التابع** الموجي الناتج **تابعية مركَّبة للمكان والزمان**؛ **إذْ يؤدي خفقان** المركبات الموجية المختلفة بالزمن **إلى اضطراب مفاعيل ترابط الحركة الإلكترونية الموجية:**

لتكن $\tau_E$ الزمن الوسطي بين تصادمين **لامرنين**؛ إن المسافة التي ينتقلها الإلكترون بين هذين التصادمين تسمى أحياناً **بطول التبعثر اللامرن** *Inelastic Scattering Length*، $l_E$.

**يُحافظ الإلكترون على ترابطه الكمومي** من أجل مسافات **أقل** من طول التبعثر اللامرن $l_E$ **ويفقده** من أجل المسافات الأكبر منه. وعموماً، $l_E>\lambda$ طالما لا توجد شروط عدم توازنٍ حادٍ. **وعادةً طول التبعثر اللامرن** $l_E$

**يفوق المسار الحر الوسطي** $l_e$؛ وفي هذه الحالة، يتعرَّض الإلكترون للكثير من التصادمات المرنة قبل أن يفقد طاقته، وتُعرف هذه العملية على أنها **عملية انتشار** *Diffusion Process* للإلكترون ويُعطى انزياحه (**طول انتشاره**) خلال الزمن الوسطي $\tau_E$ بين تصادمين غير مرنين بالمساواة:

$$l_E = \sqrt{D\tau_E} \quad (\tau_E >> \tau_e), \tag{6-6}$$

حيث يُعطى معامل الانتشار $D$ بالمساواة $D = \upsilon^2 \tau_e / \alpha$، علماً بأن $\alpha = 3$ من أجل غاز إلكتروني ثلاثي البعد؛ و $\alpha = 2$ من أجل غاز إلكتروني ثنائي البعد؛ و $\alpha = 1$ من أجل غاز إلكتروني أحادي البعد؛

وعادةً، $\tau_E$ و $l_E$ يتناقصان عند ارتفاع درجة حرارة الجملة.

**أمَّا السبب الثاني** الذي يستوجب إجراء عملية توسيط للسلوك الكمومي على إحصاء الإلكترونات فيكمن في **التأثير الحراري** *Temperature Effect*.

في الواقع، في درجات الحرارة المحدودة تتوافر إلكترونات **بطاقات مختلفة** كفايةً، وهذا ما يؤدي إلى **تباينٍ كبيرٍ** Large Spreading في **أطوار التابع الموجي** الموافق لها **فيتشوَّه الترابط** في المنظومة الإلكترونية.

**وهنا** يمكن تقييم **الطول المميز** $L_T$ المتعلق بهكذا تشوهٍ مرتبطٍ بدرجة الحرارة؛ فتعرَّض (توسع) الطاقة الإلكترونية **بمقدارٍ** من رتبة $k_B T$ **يؤدي** إلى اختلاف الأطوار مع الزمن، $t$، وفق العلاقة:

$$\Delta\phi = t\,\frac{k_B T}{\hbar}$$

إذن، يمكن تقييم التشتت الزمني $t$ على أنه اللحظة $\tau_T$ التي من أجلها $\Delta\phi \approx 1$، أي أن $\tau_T = \hbar / k_B T$.

إذا كان التبعثر **مرناً فقط**، فإن الإلكترون ينتشر في الفراغ لمسافة تساوي نحو $\sqrt{Dt}$، خلال الزمن $t$ الذي يتجاوز زمن الطيران الحر الوسطي $\tau_e$. وهكذا، يمكن الحصول على **طول الانتشار الحراري** *Temperature Diffusion Length* خلال الفاصل الزمني $\tau_T$:

$$L_T = \sqrt{D\tau_T} = \sqrt{D\hbar / k_B T}\,.$$

وعند مسافات تفوق $L_T$ **يفقد** الإلكترون الترابط.

في حقيقة الأمر، **تنتج مفاعيل التباين الطَّوري** Dephasing Effects **من التصادمات اللامرنة والتشتت الحراري للأطوار التي تحدث بآنٍ معاً**؛ ولذلك، يتعيَّن **المقياس المكاني** Spatial Scale المرتبط بفقدان الترابط الكمومي بأصغر الطولين $l_E$ و $L_T$:

$$l_\phi \cong \min\{l_E, L_T\}. \tag{7-6}$$

- يتعيَّن النقل الإلكتروني بالتابع الموجي أي بتراكب الأمواج الإلكترونية المتبعثرة.
- يمكننا أن نستنتج من الدراسة المذكورة أعلاه أن **طول الترابط** *Coherence Length* $l_\phi$، **يُعيِّن الحدّ الذي دونه يمتلك النقل الإلكتروني سلوكاً كمومياً** Quantum Character.
- فالنبائط التي أبعادها الهندسية من **رتبة طول الترابط** لن توصَّف بعد الآن بمتحولات مادية جهرية؛ كالناقلية، والسرعة الوسطية، الخ. تسمى مثل هذه الجمل (المنظومات) **جمل ميزوسكوبية** *Mesoscopic Systems* التي **أبعادها أقل من الميكرومتر** ومن رتبة أبعاد الذرات والجزيئات المنفردة.

- ولذلك، فإن النظرية الدقيقة التي تصف النبائط الميزوسكوبية *Mesoscopic Devices* هي النظرية الكمومية Quantum Theory. فخصائص مثل هذه الجمل الميزوسكوبية تُعيَّنُ بظواهر شبه– موجيةٍ ولهذا السبب، تتعلق هذه الخصائص بشدة بهندسة العينة، والتماسات، ومواقع المبعثرات، الخ.
- أمّا من أجل الحالات التي تكون فيها مسافة النقل الإلكتروني $L_z$ طويلة بالمقارنة مع طول الترابط $l_\phi$ فيمكن وصف النبيطة في إطار الفيزياء التقليدية.

### 3-1-6 نُظم النقل الإلكتروني الكمومية والتقليدية:

**Quantum and Classical Regimes of Electron Transport**

سنجري في هذه الفقرة مقارنة بين المناقشة السابقة، في الفقرة 6-1-2، للأطوال الرئيسة مع أبعاد نبيطةٍ بهدف توضيح نُظم النقل الإلكتروني الممكنة وتفسيرها؛ وبغرض التبسيط، نفرض أنَّ النقل يجري على طول بعد واحد، **ليكن الاتجاه $x$ مثلاً**. وعليه، فإن **التيار الكلي في كل من الاتجاهين الآخرين يساوي الصفر**، ولكن هذه الأبعاد العرضانية للنبيطة يمكن أن تكون مهمةً جداً.

**أولاً– نظم النقل الكمومية والميزوسكوبية Quantum and Mesoscopic Regimes of Transport:**

يمكننا تعيين نظامي النقل الإلكتروني غير التقليديين– الكمومي والميزوسكوبي وفق الآتي:

- إذا كان طول موجة دوبروي يفوق الطول المفترض للنبيطة $L_x$،

$$\lambda \geq L_x \ , \qquad (8\text{-}6)$$

فإن المسار الحر الوسطي الإلكتروني يفوق طول موجة دوبروي الموافقة بكثير، $l_e >> \lambda \geq L_x$، وعندها يوصف النقل الإلكتروني **بنظام النقل البالِستي الكوانتي** *Quantum Ballistic Transport Regime*.

- وإذا كان طول الترابط $l_\phi$ (الذي يُعزى أحياناً إلى **مقدار التباين الطوري** *Dephasing Length*) يفوق $L_x$ و $\lambda$؛

$$l_\phi > L_x, \lambda \ , \qquad (9\text{-}6)$$

فإن النقل الإلكتروني يوصف بنظام النقل الميزوسكوبي.

**ثانياً– نظام النقل الإلكتروني التقليدي Classical Regime of Electron Transport:**

- في الحالة التي يكون فيها البعد $L_x$ **أكبر** من طول الترابط (طول التباين الطوري)؛

$$L_x > l_\phi \ , \qquad (10\text{-}6)$$

يوصف النقل الإلكتروني بالنظام التقليدي.

- وإذا كان البعد $L_x$ **أقل** من المسار الحر الوسطي؛

$$\boxed{l_e > L_x \ ,} \qquad (11\text{-}6)$$

فيوصف النقل الإلكتروني **بالنظام البالِستي التقليدي** *Classical Ballistic Regime* الذي يعني أنَّ بمقدور الإلكترونات الانتقال في النبيطة على طول المساقط التقليدية **من دون تصادمات**.

**إذا كان البعد $L_x$ أكبر بكثير من المسار الحر الوسطي؛**

(12-6) $L_x >> l_e$ , فإن النقل الإلكتروني يكون من **طبيعة انتشارية**، أي أنَّ الإلكترونات تعاني العديد من التصادمات لدى انتقالها في النبيطة.

**وإذا كـان** $L_x \sim l_E >> l_e$ ، فـإن الإلكترونـات لا تفقد طاقاتها أثنـاء حركتها عبـر المقطعين الآخرين للنبيطـة (المسارات العرضانية العمودية على طول النبيطة)– $y$ و $z$.

ويسمى مثل هذا النقل **نقـلاً شـبه بالِسـتيٍ** *Quasi-ballistic Transport*. إذْ بغياب الحقل الكهربائي تُحافظ الإلكترونات على طاقاتها في النظام شبه البالستي.

بجمع المتراجحات التي تمت مناقشتها أعلاه مع المتراجحات من (2-6) إلى (4-6) يمكن أن نجد ثلاثة نظمٍ للنقل التقليدي من أجل الإلكترونات؛ في بعدٍ، وبعدين، وثلاثة أبعاد.

**تأثير الأبعاد العرضانية على انتقال الإلكترونـات:** إذا كان كل بعدٍ من البعدين العرضانيين $L_z$ و $L_y$ أكبر من طول موجة دوبروي ولكنهما من مرتبة أحد الأطوال التقليدية المميزة، فإن نظام النقل الإلكتروني يوصف **بما يسمى بمفعول البعد التقليدي العرضاني** *Transverse Classical Size Effects*.

في هذه الحالة، تؤثر التصادمات مع حدود النبيطة على النقل الإلكتروني فيها. فمثلاً، إذا كان بعد عرضاني واحد أو كلا البعدين العرضانيين من مرتبة المسار الحر الوسطي؛

$$L_z, L_y \sim l_e ,$$

فإن **مقاومة** النبيطة تتعلق بخصائص الحدود الجانبية للنبيطة بشدة.

يجدر بالذكر أن **خشـونة الحـدود** تُزيد من المقاومة وتُسيطر عليها بشكل كامل إذا تحققت المتراجحة $L_z, L_y << l_e$.

**إذا أصبحت الأبعاد العرضانية من رتبة أحد أطوال الانتشار** ( $L_E$ و $L_T$ )، فإننا نتعامل مع نوع آخر من مفعول البعد التقليدي، لاسيما مفعولات البعد الانتشاري التقليدية؛

فمثلاً، إذا كان البعد $L_z$ أو $L_y$ من مرتبة طول استرخاء الطاقة $l_E$، فإن حدود النبيطة تضمن قناة استرخاء طاقةٍ إضافية. يُسيطر مفعول البعد الانتشاري هذا على الطاقة الوسطية للإلكترونات اللامتوازنة ويتحكم بها.

وفي هذا السياق من المناسب أن نعرض تصنيفاً لنظم النقل الممكنة، كما يظهر في الجدول (6-1).

**الجدول (6-1): تصنيف أنظمة النقل الإلكتروني**

| | |
|---|---|
| **النظام الكمومي** | المسافة بين التماسات $L_x$ تُقارن بطول الموجة الإلكترونية $L_x \le \lambda$ |
| **النظام الميزوسكوبي** | المسافة بين التماسات $L_x$ أقل من طول مقدار التباين الطّوري: $L_x \le l_\phi$ |
| **النظام التقليدي (النقل الإلكتروني الأحادي– الثنائي– والثلاثي البعد)** | المسافة بين التماسات $L_x$ تفوق طول مقدار التباين الطّوري $L_x > l_\phi$ :<br>النظام البالستي التقليدي، $l_e \ge L_x$<br>النظام شبه البالستي (الطاقة– مُصانة): $L_E \ge L_x \ge l_e , l_\phi$<br>**مفاعيل الأبعاد العرضانية:**<br>→ المفعول المرتبط بالمسار الحر الوسطي، $L_z, L_y \sim l_e$<br>→ مفاعيل الانتشار، $L_x, L_y \sim l_E$ |

### 4-1-6 مقاييس الزمن والنظم الزمنية (نظم التردد):

**Time Scales and Temporal (Frequency) Regimes**

I. **تُعيّن مقاييس الزمن** التي تصف ظواهر النقل الإلكتروني **خصائص المواد والنبائط المتعلقة بالزمن والتردد**.

ثمة زمنان رئيسان يُحددان مظهر سلوك النقل الإلكتروني، هما؛

- الزمن الفاصل بين حادثتي تبعثّر متتاليتين أو **زمن الطيران الحر** (زمن التبعثر) $\tau_e$
- والزمن الذي يصف **مدة حادثة التبعثّر**، $\tau_s$. تتحقق في الشروط العادية المتراجحة $\tau_e >> \tau_s$:

1. في الواقع، عادةً ما يُفترض أن حادثة التبعثر حادثة لحظية، أي إن $\tau_s \to 0$.

في هذه الحالة، يمكن تطبيق إمَّا النظرية **التقليدية** وإمَّا النظرية **الكمومية** من أجل توصيف السلوك الإلكتروني، **تبعاً لمقاييس الطول**.

2. ولكن إذا أمكن مقارنة $\tau_e$ مع $\tau_s$ (أي إذا كان $\tau_e$ من مرتبة $\tau_s$ أو أقل منه)، وهذا ما يمكن حدوثه في شروط **تبعثر الإلكترونات اللامتوازنة** بشكلٍ شديدٍ للغاية، فإنه لا بد من وصف السلوك الإلكتروني كمومياً **بصرف النظر عن حجم** الجملة.

II. تُعدُّ **الأزمنة المميزة** وعلاقاتها بأبعاد النبيطة مهمةً للغاية في أنظمة النقل التقليدي. فهي تُحدد النظم الزمنية والترددية لعمل النبيطة؛

فمثلاً، يُعيّن **زمن العبور** *Transit Time*، $t_{tr} = L_x / \upsilon$، المدة التي تستغرقها إشارة لتعبر النبيطة (حيث $\upsilon$ السرعة الإلكترونية). إذن يُعيّن زمن العبور، $t_{tr}$ **السرعة الحدّية** Ultimate Speed من أجل النبيطة المدروسة: ليس بمقدور النبيطة العمل بفعالية في مجال زمني أقل من $t_{tr}$ أو بترددات أكبر من $t_{tr}^{-1}$. وهذا ما يُفسِّر نزعة **الإلكترونيات الحديثة** (أو بالأحرى أحد ميولها) إلى تصغير أبعاد النبيطة.

**إن الأزمنة المتعلقة بالأبعاد العرضانية**، $t_b = L_{z,y} / \upsilon$ (الموافقة لجوار أنظمة النقل بالطريقة الباليستية)، أو $t_D = \left(L_{z,y}\right)^2 / D$ (من أجل **تأثيرات البعد الانتشاري**)، **تُحدد صفات النقل الإلكتروني** عند ترددات من مرتبة $t_b^{-1}$ أو $t_D^{-1}$.

1. نعلم من ميكانيك الكمّ، أنه إذا كانت **الكمونات الخارجية مستقلة عن الزمن** DC-Field، فإن الإلكترونات تكون في **حالات مستقرة** *Stationary States*. في هذه الحالة، وبصرف النظر عن التابعية– المكانية المعقدة الممكنة للتابع الموجي، فإن التطور الزمني لحالة مستقرة تتعيّن دوماً بعامل أسّي $\exp\left[-\mathrm{i}\left(E/\hbar\right)t\right]$.
2. وإذا طُبّق **حقلٌ خارجيٌ متغيّرٌ** AC-Field بتواترٍ زاويٍ $\omega$ على جملة إلكترونية مستقرة، فيمكن وصف استجابتها بأحد الأنظمة الثلاثة الآتية المختلفة تبعاً لتردد الحقل الخارجي:

**أولاً– الترددات العالية جداً (الكمومية) Ultra-High (Quantum) Frequencies**

1. **إذا كانت $\hbar\omega$ من مرتبة الحالة الطاقية الإلكترونية المستقرة المميزة**، $E$، فإن طبيعة الاستجابة الإلكترونية ستكون **مكمَّاةً** (أي تخضع لميكانيك الكمّ): فالانتقالات المسموحة بين الحالات هي فقط تلك الحالات التي تتحقق من أجلها المساواة $\Delta E=\hbar\omega$.

إذا كانت الحالة $E$ مكمَّاة Quantized، فإن **التفاعل** يكون ممكناً عند **ترددات التجاوب فقط**. ولدى تغيّر أبعاد النبيطة يمكن أن يتغير الطيف الطاقي، ومن ثمَّ تتغير الخصائص الترددية في مجال واسع.

تؤدي الأزمنة الحركية؛ $\tau_e$ (زمن الطيران الحر)، و $\tau_E$ (زمن التبعثر اللامرن)، الخ إلى تعرّض (توسّع) هذه التجاوبات Resonances. **وإذا فاق هذا التوسّع الفواصل الطاقية بين المستويات المكمَّاة، فإن السلوك الكمومي المتقطع يتغير إلى سلوك الميكانيك التقليدي شبه– المستمر**.

2. **أمَّا إذا كان $\Delta E<<\hbar\omega$، فإن الاستجابة الإلكترونية لحقلٍ متناوبٍ تكون ذات طبيعة تقليدية** (إذْ يمكن إهمال تكميّة النقل)؛ فمن المنظور التقليدي سيُسبب الحقل الخارجي المتناوب تسارعاً وتباطؤاً إلكترونياً دورياً. غير أن التبعثّر يقطع هذه التسارعات والتباطؤات (أي يسحقها). وتبعاً لعدد حوادث التبعثّر التي تجري خلال دور واحد يمكننا التمييز بين نظامين مختلفين للسلوك الإلكتروني.

**ثانياً– الترددات العالية (التقليدية) High (Classical) Frequencies**

إذا تحققت المتراجحة $\omega\tau_e>>1$، فإن الحركة الإلكترونية **لن تتبعثّر خلال دور واحد** للحقل الخارجي بالمبعثِّرات. وتبعاً للميكانيك التقليدي تهتز كمية الحركة الإلكترونية (الاندفاع الإلكتروني) **بطورٍ مخالف** لطور الحقل المطبَّق (لأن الحركة الإلكترونية لا تستطيع مواكبة اهتزازات الحقل المطبّق السريعة).

**ثالثاً– الترددات المنخفضة Low Frequencies**

إذا كان $\omega\tau_e<<1$، فإن الإلكترون **يتعرَّض للعديد من حوادث التبعثّر خلال دور واحد** للحقل الخارجي. والتبعثر المتعدد خلال الدور الواحد يجعل الإلكترون في حالةٍ شبه مستقرةٍ **بحيث يستطيع مواكبة** اهتزازات الحقل الخارجي؛ بتعبير آخر، يهتز الاندفاع الإلكتروني **بطورٍ مطابقٍ** لطور الحقل.

نستنتج في ختام هذه الفقرة، أنه توجد أنظمة نقل إلكتروني مختلفة تبعاً لأبعاد النبيطة، ودرجة الحرارة، وشروط أخرى؛ إذْ كل نظام من هذه الأنظمة يعرض بوضوحٍ خصائص مميزة ويستوجب كل منها توصيفاً فيزيائياً متلائماً مع الشروط ذات الصلة.

**3-6 إحصاء الإلكترونات في الأجسام الصلبة والتراكيب النانوية:** مطالعة حتى نهاية الصفحة 12

**Statistics of the Electron in Solids and Nanostructure**

من أجل التحليل اللاحق للتراكيب النانوية لا بد من عرضٍ موجزٍ للخصائص الأساسية للجمل المتعددة الإلكترونات؛ في الواقع، **تتألف أي مادة نصف ناقلة من عدد كبير من الإلكترونات** أي أنها فعلياً **جملة متعددة الإلكترونات** *Many-Electron System*، ومن أجل جملة كهذه، ثمة سؤال أساسي يطرح نفسه حول كيفية توزّع الجسيمات على الحالات الطاقية المختلفة التي تصف هذه الجسيمات.

→ فمثلاً، إذا تحركت **الجسيمات بحريةٍ** فيمكننا الاهتمام بالمعلومات ذات الصلة من خلال **توزّعها** على **السُّرعات**؛

→ وإذا كانت حركة الجسيمات **مُكمَّاة**، فإن معرفة توزّعها على مستويات الطاقة يكون ضرورياً، وهكذا دواليك؛

→ وبمعرفة مثل هذه التوزّعات نستطيع إيجاد كل الصفات المميزة المتوسطة للجمل المتعددة الجسيمات.

إن القواعد والمبادئ التي تبعاً لها تسكن الجسيمات الحالات الطاقية للجمل المتعددة الجسيمات **تكوّن** ما يسمى **بالإحصاء الفيزيائي** *Physical Statistics*. بمقدورنا في الإحصاء الفيزيائي، وبهدف وصف إسكان الحالات بالجسيمات، استعمال **تابع توزّعٍ** *Distribution Function* للجسيمات: في حالة التوازن، **يُعيّنُ** التوزّع على المستويات الطاقية **خصائص** الجمل المتعددة الجسيمات بشكل كامل؛ إذْ يأخذ تابع التوزّع معنى احتمال إيجاد جسيمات بطاقة معيّنة $E$. ليكن $E_l$ المستوى الطاقي لجسيماتٍ في جملة متعددة- الجسيمات حيث يُرقِّم الدليل $l$ المستويات الطاقية. وعندها، يمكن عدّ تابع التوزّع **تابعاً للطاقة**، $F(E_l)$. من الواضح أن:

$$\sum_l F(E_l) = N, \qquad (13\text{-}6)$$

حيث $N$ العدد الكلي للجسيمات.

**إذن**، المبادئ الإحصائية في الفيزياء التقليدية **والفيزياء الكمومية** مختلفة؛

فالفيزياء الكمومية تواكب الصفات الإحصائية غير المتوفرة في التوصيف التقليدي، وهذه الصفات مرتبطة بحقيقة أن الجسيمات الأولية هنا، بما فيها الإلكترونات، متطابقة ومن غير الممكن، من حيث المبدأ، تحديد إحداثياتها **وتعقُّب إلكترونٍ بعينه دون سواه**. فضلاً عن أن ثمة "صفة ذاتية" للجسيمة، هي السبين Spin، تؤدي دوراً غاية في الأهمية في فيزياء الجسيمات المتعددة.

**إحصاء فيرمي للإلكترونات Fermi Statistics of Electrons:**

إذن، سبين الجسيمة يؤدي دوراً حاسماً في الإحصاء الكمومي وقد عرضنا تعريف سبين الجسيمة في مقررات أخرى وقلنا بأنه درجة حرية إضافية "داخلية":

في الواقع، على الرغم من أنه يمكن مقارنة السبّين بالدوران التقليدي إلاّ أنه كميّة كمومية على نحو تام ويختلف جوهرياً عن قرينه التقليدي. **فالخاصية الكموميّة الأساسية للسبّين هي كميّة من دون أبعاد** تسمى **العدد السبيني** *Spin Number* ويرمز لها بالرمز $s$.

وتم الإقرار تجريبياً أن للإلكترون عدداً سبينياً يساوي **النصف** $\frac{1}{2}$؛ فإذا ثبتنا محوراً في الفراغ، فإن مسقط سبّين الإلكترون على هذا المحور يمكن أن يكون إمّا $+\frac{1}{2}$ وإمّا $-\frac{1}{2}$.

الإلكترونيات النانوية - د. حسن سليمان

ويتطلب التوصيف الكامل لحالة إلكترونية ما مجموعة أعداد كمومية: **ثلاثة منها توافق حركة الجسيمة في الفراغ**؛ كأن تكون $l=\{l_1,l_2,l_3\}$، **والرابع** يوافق سبيناً $s$.

وتبعاً للمناقشة التقليدية يوافق هذا العدد الكمومي الرابع تحللاً ثنائياً Tow-Fold Degeneracy (أو تحللاً ثنائي التطبُّق) لكل مستوى طاقة.

السبين الإلكتروني، من أجل حالات فعلية كثيرة، ليس مهماً في تعديل (أو تغيّر) الأطياف الطاقية أو التابعية المكانية للتوابع الموجية، الخ. ولكن ثمة نتيجة بالغة الأهمية نابعة من حقيقة أن العدد السبيني الإلكتروني **نصف عدد صحيح**.

في الحقيقة، تخضع الجسيمات التي سبيناتها تساوي أنصاف أعداد صحيحة لمبدأ الاستبعاد لباولي Pauli Exclusion Principle الذي يُقرأ بالشكل الآتي:

فأي **حالة كمومية**، $\{l,s\}$، يمكن أن **يسكنها جسيم وحيد فقط**. وبتعبير آخر، لا يمكن لإلكترونين في جملةٍ أن يتواجدا بآن معاً في الحالة الكمومية ذاتها. أو يمكن القول أنه بمقدور إلكترونين أن يكونا في الحالة الطاقية ذاتها إذا اختلف عددهما الكموميان السبينيان (أي لدينا ما يسمى **الحالة المتحللة** *Degenerate State*)؛

فإذا كان عدد كمومي سبيني مساوياً $+\frac{1}{2}$، فإن العدد الآخر يجب أن يساوي $-\frac{1}{2}$. يُزال التحلل إذا توافر تآثرٌ Interaction بين السبين الإلكتروني والحركة الانسحابية (المدارية) الإلكترونية يُعرف **بالتآثر (السبين– المداري)** *Spin-Orbital Interaction*. وفي هذه الحالة يؤثر السبين الإلكتروني على الخصائص الفراغية الإلكترونية وعندها تمتلك الإلكترونات ذات السبين $+\frac{1}{2}$ والسبين $-\frac{1}{2}$ **طاقات مختلفة**.

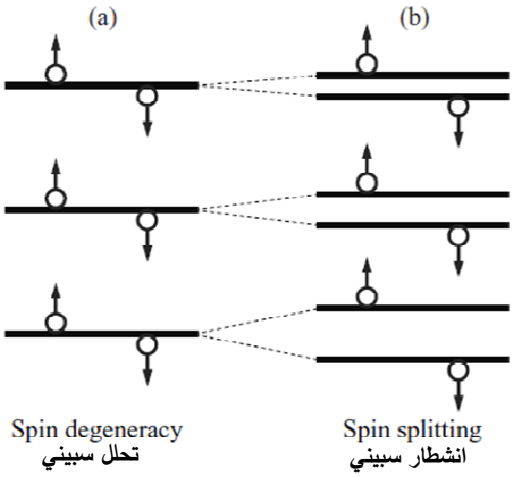
فالشكل (3-6) **يوضح** الإسكانات الممكنة Possible Populations للمستويات الطاقية بإلكترونات من أجل حالتين؛ مستويات طاقة متحللة ومستويات طاقة لامتحللة.

من الواضح، أن مبدأ استبعاد باولي يؤدي إلى إحصاء جديد– غير تقليدي، للإلكترونات. يسمى مثل هذا الإحصاء **إحصاء فيرمي** *Fermi Statistics*. في **شروط التوازن** يوصف إسكان المستويات الطاقية **بتابع توزّع فيرمي** *Fermi Distribution Function*:

$$F_{\mathrm{F}}\left(E_{l,s}\right)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{E_{l,s}-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}}}, \qquad (18\text{-}6)$$

حيث $T$ درجة حرارة الجملة، و $\left(E_{l,s}\right)$ طاقة الحالة الكمومية الموصوفة بمجموعة أعداد كمومية؛ $l$ و $s$، و بما يسمى **بطاقة فيرمي**، $E_{\mathrm{F}}$، *Fermi Energy* أو **مستوى فيرمي** *Fermi Level*.

يوضح الشكل (4-6) تغيّر تابع توزّع فيرمي $F_{\mathrm{F}}\left(E_{l,s}\right)$ عند تغيّر درجة الحرارة حيث استخدمنا المتحولات الحرارية $T_4>T_3>T_2>T_1$ و $T_1=0$. يجدر بالذكر أن طاقة فيرمي يمكن أن ترتبط بالعدد الكلي

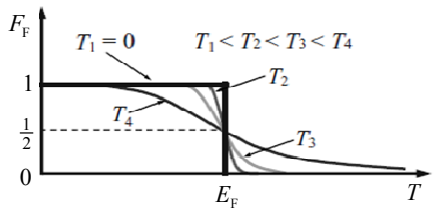



**الشكل (3-6): يوضح إنشغال سويات طاقية بالإلكترونات؛ (a) مستويات متحللة سبينياً و (b) مستويات غير متحللة (مستويات الانشطار السبيني).**

للإلكترونات من خلال شرط التنظيم، المعادلة (13-6). إذا أخذنا بالحسبان المجموع على السبين نحصل على المساواة

$$\sum_{l,s} F_{\mathrm{F}}\left(E_{l,s}\right)=N\,, \tag{19-6}$$

التي تُعطي $E_{\mathrm{F}}=E_{\mathrm{F}}(N,T)$.




**الشكل (4-6): يوضح كيفية تغيّر تابع توزيع فيرمي مع تغيّر درجة حرارة البلّورة**

يمكن أن نرى من المعادلة (18-6)، تبعاً لمبدأ الاستبعاد، أن احتمال إسكان أي حالة طاقية $\{l,s\}$، معرَّفة بالمعادلة (18-6)، أقل من الواحد أو يساويه.

إن الحد **الثاني** الواقع في مقام الكسر، في المعادلة (18-6)، يكون في درجات الحرارة المرتفعة أكبر بكثير من الواحد وتوزّع فيرمي قريباً من توزّع بولتزمان:

$$F_{\mathrm{F}}\approx \mathrm{e}^{\frac{E_{\mathrm{F}}-E}{k_{\mathrm{B}}T}}\,. \tag{20-6}$$

تتطابق المعادلتان (20-6) و (14-6) عندما يساوي ثابت التنظيم $C$ ما يأتي:

$$C=\exp\left(\frac{E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right). \tag{21-6}$$

والشكل (4-6) يوضح المنحني الموافق تخطيطياً عندما $T=T_4$.

يتحول التابع $F_{\mathrm{F}}$ في حدود درجات الحرارة المنخفضة، $T\to 0$، إلى تابع الخطوة Step Function:

$$F_{\mathrm{F}}(E)=\begin{cases}1, & E_{\mathrm{F}}>E\,,\\ 0, & E_{\mathrm{F}}<E\,,\end{cases} \tag{22-6}$$

أي أن:

- $F_{\mathrm{F}}(E)=1$ من أجل المستويات الطاقية الواقعة تحت طاقة فيرمي $E_F$، طالما أن كل المستويات ذات الطاقات $E<E_{\mathrm{F}}$ مشغولة؛
- و $F_{\mathrm{F}}(E)=0$ من أجل الطاقات الواقعة فوق $E_F$ طالما أن هذه المستويات فارغة.
- إذن، ضمن حدود درجة الحرارة المنخفضة هذه تُعزى الجملة الإلكترونية أحياناً إلى ما يسمى **بالغاز الإلكتروني الشديد التحلل** *Highly Degenerate Electron Gas*.

والآن بمقدورنا **تطبيق إحصاء فيرمي على الإلكترونات في عصابة الناقلية**.

**أولاً–** ليكن $n$ تركيز الإلكترونات الحجمي في عصابة ناقليةٍ تتصف بتبددٍ طاقيٍ Energy Dispersion $E(\vec{k})$. نقبل هنا أن الطيف الطاقي مستقل عن السبين. ولهذا السبب، فإن مجموعة الأعداد الكمومية، $l$، مطابقة لمجموعة المتجهات– الموجية $\vec{k}$. وتبعاً لتوزّع فيرمي فإن **احتمال** إيجاد إلكترون يمتلك المتجه الموجي $\vec{k}$ **يساوي** إلى

$$F_{\mathrm{F}}\left(E\left(\vec{k}\right)\right)=2\,\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{E\left(\vec{k}\right)-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}}}\,, \tag{23-6}$$

حيث يظهر العامل 2 من التحلل السبيني Spin Degeneracy.

يرتبط التركيز الإلكتروني $n$ وطاقة فيرمي $E_F$ بالمعادلة الآتية:

$$n=\frac{N}{V}=\frac{2}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{1+e^{\left(E\left(\vec{k}\right)-E_F\right)/(k_BT)}}, \qquad (24\text{-}6)$$

حيث $V$ حجم البلورة المدروسة. يمكن تحويل المجموع في العلاقة الأخيرة إلى تكامل؛

في الواقع، تبعاً للتحليل المعطى في **ميكانيك الكم والمعادلة** (4-10) التي توصلنا إليها في مقرري علم النانو وتطبيقاته وفيزياء الحالة الصلبة (2) الآتية:

$$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{a}_i\ N_j=2\pi n_j\ ,\quad n_j=1,2,3....,N_j}$$

**يأخذ المتجه الموجي للإلكترون القيم الآتية:**

$$k_xl_x=2\pi l_1 \qquad \text{و} \qquad k_yl_y=2\pi l_2 \qquad \text{و} \qquad k_zl_z=2\pi l_3$$

حيث $l_1$، و $l_2$، و $l_3$ أعداد صحيحة.

لقد أدخلنا في العلاقات الأخيرة أبعاد البلورة $l_x$، و $l_y$، و $l_z$.

(ترتبط الأبعاد البلورية **بالمتجهات الأساسية** للشبكة البلورة $a_i$ **وبعدد الخلايا الأولية** $N_i$ ؛ بعلاقات من الشكل $L_x=a_x\ N_x$، و $L_y=a_y\ N_y$، و $L_z=a_z\ N_z$). ولهذا السبب، يكافئ الجمع على $\vec{k}$ الجمع على $l_i$.

ويمكن حساب العملية الأخيرة بشكل تقريبي من خلال التكامل:

$$\sum_{l_1,l_2,l_3,}(.....)\approx\int\int\int dl_1\ dl_2\ dl_3\ (.....)$$

وبما أن تابع التوزّع يتعلق بالتبدد الطاقي $E\left(\vec{k}\right)$ فمن المناسب التعبير عن التكامل الأخير بدلالة التكامل على $\vec{k}$. إذْ يمكننا في هذا السياق استعمال العلاقات الآتية:

$$\Delta l_1=\frac{l_x}{2\pi}\cdot\Delta k_x\ ,\qquad \Delta l_2=\frac{l_y}{2\pi}\cdot\Delta k_y\ ,\qquad \Delta l_3=\frac{l_z}{2\pi}\cdot\Delta k_z\ .$$

وطالما أن $L_x\times L_y\times L_z=V$، فيمكننا كتابة العلاقة النهائية الآتية:

$$\sum_{\vec{k}}(.....)=\frac{l_x\cdot l_y\cdot l_z}{2\pi\cdot2\pi\cdot2\pi}\int\int\int dk_x\ dk_y\ dk_z\ (.....).$$

ومن ثمَّ

$$\boxed{\sum_{\vec{k}}(.....)=\frac{V}{(2\pi)^3}\int\int\int dk_x\ dk_y\ dk_z\ (.....).} \qquad (25\text{-}6)$$

يُعدُّ هذا الإجراء، المتمثّل في استبدال الجمع على $\vec{k}$ المتقطع بالتكامل على $\vec{k}$ المستمر، مفيداً **من أجل حساب كميات وسطية**.

وبمثابة مثالٍ، لنحسب طاقة فيرمي $E_F$ لجملة إلكترونية واقعة في درجات حرارة منخفضة $(T\to0)$ على فرض أن الطيف الطاقي للإلكترونات متماثل المناحي أي إنه متعلق بالطويلة $\left|\vec{k}\right|=k$ **فقط**:

$$\boxed{E\left(\vec{k}\right)=E\left(k\right)=\frac{\hbar^2k^2}{2m^*},}$$

حيث $m^*$ الكتلة الفعَّالة للإلكترون.

ليكن $n$ التركيز الإلكتروني؛ فتبعاً لإحصاء فيرمي، ستشغل الإلكترونات كل الحالات الطاقية الواقعة تحت طاقة فيرمي. وبما أن $E(k)$ تابع متزايد بالنسبة للعدد الموجي $k$، فينتج، عندما $T\to 0$، أن كل الحالات التي تحقق الشرط $k\le k_F$ تكون مسكونةً بالإلكترونات، حيث تسمى الكمية $\vec{k}_F = k_F$ **بمتجه فيرمي– الموجي** *Fermi Wave-vector* المعرَّف بالمساواة $E(k_F)=E_F$؛ **وعند حساب التركيز** من خلال المعادلة (6-24) يجب أن نُجري الجمع (التكامل) **على كل الحالات المشغولة**، أي على الحالات $k\le k_F$. فمن أجل هذه الحالات– $k$، لدينا $F_F=1$ ومن ثمَّ:

$$\boxed{n=\frac{2}{V}\sum_{k\le k_F}1=\frac{2}{V}\frac{V}{(2\pi)^3}\iiint_{|\vec{k}|\le k_F}d^3k\,.}$$

**تُعطي قيمة التكامل في المعادلة الأخيرة حجم كرةٍ** نصف قطرها $k_F$، أي $\frac{4}{3}\pi k_F^3$.

وعندها نستطيع الحصول على علاقة بين متجه فيرمي الموجي $k_F$ والتركيز الإلكتروني $n$:

$$n=\frac{2}{2\times 4\pi^3}\frac{4}{3}\pi k_F^3=\frac{k_F^3}{3\pi^2} \qquad \text{أو} \qquad k_F=\left(3\pi^2 n\right)^{1/3}.$$

وأخيراً نجد أن طاقة فيرمي للإلكترونات المتحللة في بلورة حجمية تساوي:

$$E_F=E\big|_{k=k_F}=\frac{\hbar^2k_F^2}{2m^*}=\frac{\hbar^2\left(3\pi^2n\right)^{2/3}}{2m^*};$$

ومن ثمَّ نحصل على العلاقة الآتية التي تربط بين طاقة فيرمي والتركيز الإلكتروني المتحلل في درجات الحرارة المنخفضة جداً:

$$\boxed{E_F=\left(3\pi^2\right)^{2/3}\frac{\hbar^2n^{2/3}}{2m^*},\quad \text{at}\quad T\to 0\,.} \qquad (6\text{-}26)$$

في هذه الحالة، **تزداد طاقة فيرمي** $E_F$ **بازدياد التركيز الإلكتروني ولكن ليس بشكلٍ خطِّي، بل وفق قانون القوة** $\frac{2}{3}$. وبما أن تابع فيرمي يحوي عاملاً أُسياً، فإن حد درجات الحرارة المنخفضة يوافق الشرط $E_F >> k_BT$.

**يبقى الغاز الإلكتروني** في الفلزات وأنصاف النواقل المطعمَّة بشدة **متحللاً حتى درجة حرارة الغرفة**.

فمثلاً، في حالة بلّورة **زرنيخيد الغاليوم** GaAs حيث تبلغ الكتلة الإلكترونية الفعَّالة $m^*=0.067\,m_0$ ( $m_0$ كتلة الإلكترون الحر)، وتركيز الإلكترونات $n=10^{17}\ \text{cm}^{-3}$ نجد أن $k_F=1.43\times10^6\ \text{cm}^{-1}$ و $E_F=11.6\ \text{meV}$؛ توافق هذه القيمة للطاقة درجة حرارة تساوي 135K.

ولهذا السبب، يمكن في درجات الحرارة الأقل من درجة الحرارة الأخيرة، $T<135\text{K}$، دراسة تركيز الغاز الإلكتروني $n=10^{17}\ \text{cm}^{-3}$ في GaAs؛ **كتركيز متحلل**، ومن الممكن استعمال هذه التقييمات من أجل طاقة فيرمي $E_F$ ومتجه فيرمي الموجي $k_F$ أيضاً.

تُعدُّ جملة الغاز الإلكتروني المتحلل جملةً فيزيائيةً رائعةً ومهمةً جداً؛ إذْ تُسهِّل هذه الحالة المحدودة فهم العديد من الظواهر المعقدة بطريقة بسيطة. في الواقع، وكما أكدنا سابقاً، إن كل الحالات الواقعة تحت $E_{\mathrm{F}}$ ، في غازٍ إلكترونيٍ متحللٍ، تكون مسكونةً؛

**لنفترض الآن أن اضطراباً خارجياً صغيراً طُبِّق على هكذا جملة متعددة الإلكترونات:**

**يُسبِبُ** الاضطراب Perturbation **إعادة توزّع الإلكترونات بين الحالات الطاقية**، ولكن كل الحالات الواقعة تحت مستوى فيرمي ممتلئة تماماً، مما يعني أن إعادة التوزّع غير ممكنة، وعوضاً عن ذلك، **يمكن لتلك الإلكترونات الواقعة في مستوي فيرمي فقط**، أي التي تملك طاقةً تساوي $E_{\mathrm{F}}$ تماماً، **أن تتأثر بالاضطراب**؛

وهذا يؤدي إلى حقيقة مفادها، أن **جزءاً صغيراً** فقط من الإلكترونات **يمكن أن يُسهم في استجابة البلورة للاضطراب**. إذْ يمكن القول إنَّ **هذه الإلكترونات "النشطة"** تقع على ما يسمى **سطح فيرمي** *Fermi Surface* في الفراغ- $\vec{k}$ وأنّ **أبعاد Size هذا السطح هو الذي يُحدد الخصائص الأساسية للغاز الإلكتروني المتحلل**؛ فسطح فيرمي من أجل البلورات شبه- الحجمية ذوات الطيف الطاقي البسيط المدروس أعلاه هو **مجرد كرة** نصف قطرها $k_{\mathrm{F}}$ . يُمثِّل الشكل (5a-6) سطح فيرمي لغاز إلكتروني ثلاثي البعد. ويمكن أن نبيّن بسهولة، باستخدام المعادلة $\vec{\upsilon}=dE/d\vec{p}$ ، أن إلكتروناً واقعاً على سطح فيرمي يمتلك السرعة $\upsilon_{\mathrm{F}}=\hbar k_{\mathrm{F}}/m^{*}$ .

**ثانياً- يمكننا دراسة جملة إلكترونية منخفضة- البعد بصورة مشابهة تماماً لما سبق**؛ فكما ناقشنا في الفقرة 5-4 في مقرر علم النانو وتطبيقاته، من الممكن **باستعمال تراكيب متغايرةٍ** Heterostructure، تصنيع **بِئَرِ كمونٍ** Potential Wells تحصِّر إلكترونات، **من عصابة الناقلية**، في طبقات ضيقة بحيث تصبح الحركة الإلكترونية عبر هذه الطبقات مُكمَّاة Quantized. وهذا ما يجعل الطاقات الإلكترونية على هيئة **عصابات جزئية منخفضة- البعد** تُعطى **بالمعادلة** (49-3)؛

$E_{n,\vec{k}_{||}}=\varepsilon_{n}+\dfrac{\hbar^{2}}{2m}\left(k_{x}^{2}+k_{y}^{2}\right)$ ، من أجل ما يسمى **حُفَر كمومية** Quantum Wells. إذن:

$$E_{l_3}\left(\vec{k}_{||}\right)=\varepsilon_{l_3}+\frac{\hbar^{2}k_{||}^{2}}{2m^{*}}, \qquad (27\text{-}6)$$

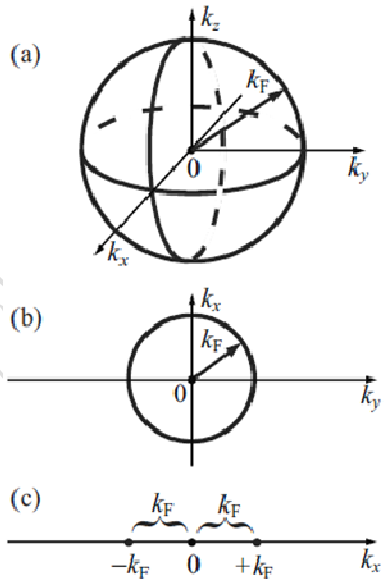
حيث $l_3\ (l_3=1,2,.....)$ و $k_{||}$ (المتجه ثنائي البعد) يُعيّنان الحركة الإلكترونية في مستوي الطبقة.

يمكن استخدام تابع توزّع فيرمي الذي يأخذ شكل المعادلة (18-6) لحساب التركيز الإلكتروني ثنائي- البعد (**التركيز الطبقي أو السطحي** *Sheet Concentration* **للإلكترونات**) وفق العلاقة الآتية:

$$n_{2\mathrm{D}}=n\times d=\frac{2}{S}\sum_{l_3,\vec{k}_{||}}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{E_{l_3}\left(\vec{k}_{||}\right)-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}}}, \qquad (28\text{-}6)$$




**الشكل (5-6): سطوح فيرمي من أجل ثلاثة غازات إلكترونية (a) ثلاثية البعد، و (b) ثنائية البعد، و (c) أحادية البعد**



حيث أدخلنا في هذه المعادلة **التركيز السطحي** للإلكترونات $n_{2D}$ (عدد الإلكترونات في وحدة المساحة) وسماكة الطبقة $d$ ومساحتها $S$ المحصورة Confined Layer. من الواضح هنا، أن الحجم يساوي $V = d \times S$.

في الحقيقة، إن المعادلة (28-6)، وكما وجدنا من أجل بلورة حجمية، تُحدِّدُ العلاقة بين التركيز السطحي للإلكترونات $n_{2D}$ وطاقة فيرمي $k_F$.

**يمكن** وبشكل واضح **حساب التركيز السطحي للإلكترونات ضمن حدود الغاز الإلكتروني المتحلل**. لنفرض مثلاً، أن درجة الحرارة منخفضة وأن **العصابة الجزئية الأخفض فقط مشغولة بالإلكترونات**؛ في هذه الحالة، يجب أن نحافظ في المجموع على $l_3$ في المعادلة (28-6) على حد واحد يوافق $l_3 = 1$ فقط:

$$n_{2D} = n \times d = \frac{2}{S} \sum_{\vec{k}_{||}} \frac{1}{1 + e^{\frac{E_1(\vec{k}_{||}) - E_F}{k_B T}}}, \qquad (29\text{-}6)$$

يمكن تبسيط حساب الطرف الأيمن من هذه المعادلة باستبدال المجموع على $\vec{k}_{||}$ بالتكامل، بشكل مشابه للمعادلة (25-6)، فنجد:

$$\sum_{\vec{k}_{||}} (.....) = \frac{S}{(2\pi)^2} \iint dk_x \, dk_y \, (.....), \qquad (30\text{-}6)$$

حيث $k_x$ و $k_y$ مركبتا المتجه ثنائي– البعد $\vec{k}_{||}$.

**تُعطي قيمة التكامل في المعادلة الأخيرة مساحة قرصٍ** نصف قطره $k_F$، أي $\pi k_F^2$. ويمكن ضمن حدود درجة الحرارة المنخفضة $T \to 0$ حساب التركيز السطحي $n_{2D}$ من خلال تعيين متجه فيرمي الموجي $\vec{k}_{||,F}$ بوساطة العلاقة:

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_{||,F}^2}{2m^*}. \qquad (31\text{-}6)$$

يُعدُّ "سطح" فيرمي من أجل حاملات شحنة ببعدين "قرصاً" نصف قطره $k_{||,F}$ في الفراغ $\vec{k}_{||}$، كما يوضح الشكل (5b-6). ونجد من تكامل المعادلة (30-6) على "القرص" على العلاقتين الآتيتين، وذلك عندما $T \to 0$:

$$n_{2D} = \frac{2}{S} \sum_{\vec{k}_{||}} 1 = \frac{2}{S} \frac{S}{(2\pi)^2} \iint_{|\vec{k}| \le k_F} d^2k = \frac{2}{S} \frac{S}{4\pi^2} \left(\pi k_{||,F}^2\right) = \frac{1}{2\pi} k_{||,F}^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{2m^*}{\hbar^2} E_F,$$

ومن ثَمَّ

$$E_F = \frac{\hbar^2 (2\pi n_{2D})}{2m^*} = \frac{\pi \hbar^2}{m^*} n_{2D} \quad \text{و} \quad k_{||,F} = \sqrt{2\pi n_{2D}} \qquad (32\text{-}6)$$

هذا يعني أن **طاقة فيرمي**، $k_F$، **تزداد مع التركيز السطحي الإلكتروني** $n_{2D}$ **خطياً**.

**ثالثاً**– يُعطى الطيف الطاقي من أجل بنية نانوية **تنحصر** فيها الحركة الإلكترونية **ببعدين** وتكون **حرةً في البعد الثالث**، أي من أجل **سلك كمومي**، بالعلاقة الآتية:

$$E_{l_2, l_3}(k_x) = \varepsilon_{l_2, l_3} + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*}, \qquad (33\text{-}6)$$

حيث أُفترض أن الاتجاه $x$ هو الاتجاه الوحيد للحركة الحرة.

وبتطبيق إجراء مشابه للإجراء الذي أجريناه أعلاه يمكننا أن نرى أنه من أجل درجات الحرارة المنخفضة **ينكمش ويتقلص** Shrink "**سطح**" **فيرمي إلى نقطتين** في الفراغ– $k$ أحادي البعد:

$$k_x = \pm k_{\mathrm{F}}$$

ثمَّ إنَّ التركيز الخطّي الإلكتروني الذي يمكن تعيينه بالعلاقة $n_{1\mathrm{D}} = N/L$، حيث $N$ العدد الكلّي للإلكترونات في **السلك** و $L$ طوله، يساوي:

$$n_{1\mathrm{D}} = \frac{2}{L}\sum_{\vec{k}_{\mathrm{F}}} 1 = \frac{2}{L}\frac{L}{2\pi}\int_{|\vec{k}|\le k_{\mathrm{F}}} dk = \frac{2}{L}\frac{L}{2\pi}(2k_{\mathrm{F}}) = \frac{2}{\pi}k_{\mathrm{F}}$$

ومن ثمَّ نحصل على العلاقة الآتية التي تربط بين **التركيز الخطّي الإلكتروني** وطويلة متجه فيرمي الموافق:

$$k_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2}\pi\, n_{1\mathrm{D}}$$

**توضح** الأشكال (5a,b,c-6) **التحوّل المتتالي لسطح فيرمي وتطوره مع تخفيض الأبعاد**؛ حيث نحصل على طاقة فيرمي للإلكترونات ببعدٍ واحدٍ من أجل $T \to 0$ بالشكل الآتي:

$$E_{\mathrm{F}} = \frac{\hbar^2 k_{\mathrm{F}}^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2\left(\frac{1}{2}\pi\, n_{1\mathrm{D}}\right)^2}{2m^*} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8m^*}n_{1\mathrm{D}}^2 \,. \qquad (34\text{-}6)$$

يمكننا أن **نستنتج من مقارنة طاقات فيرمي الحاصلة من أجل أبعاد مختلفة للغاز الإلكتروني أن تخفيض أبعاده يؤدي إلى زيادة** $E_{\mathrm{F}}$ **بشكل متسارع عند زيادة تركيز الإلكترونات من أجل جمل منخفضة– البعد.**

يُعدُّ مفهوم إحصاء فيرمي إحدى الأفكار الأساسية لفيزياء الحالة الصلبة الحديثة وغاية في الأهمية من أجل الإلكترونيات النانوية. يُطبَّق إحصاء فيرمي على نطاق واسع في توصيف نبائط التراكيب النانوية.

## 4-6 كثافة الحالات الطاقية من أجل الإلكترونات في التراكيب النانوية:

**The Density of States of Electrons in Nanostructures**

لإتمام تحليل إسكان المستويات الطاقية بالإلكترونات في التراكيب النانوية لا بد من دراسة كميّة فيزيائية أخرى تصف الإسكان الإلكتروني؛ تُعرف **بكثافة الحالات** *Density of States*. يكمن سبب إدخال هذه الكميّة في الآتي:

- إنَّ الأطياف الطاقية الإلكترونية في الهياكل النانوية الحاوية على إلكترونات ناقلية معقدة وتتألف من سلسلة من **العصابات الجزئية** Sub-bands؛
- إذْ **تُعيَّن** الفواصل بين **العصابات الجزئية** **بشكل كمون الحصر** في حين يكون الطيف ضمن كل عصابة مستمراً،
- فضلاً عن أن هذه الأطياف المستمرة تكون متداخلة.

ولتوصيف هذه الأطياف المعقدة من المناسب أن نُدخل **تابعاً طيفياً** يُعرف باسم كثافة الحالات ونرمز له بالرمز $\rho(E)$؛ **إذْ يعطي هذا التابع عدد الحالات الكمومية** $dN(E)$ **في مجالٍ صغيرٍ يقع بجوار طاقة ما** $E$:

$$dN(E)=\rho(E)\,dE\,. \tag{35-6}$$

إذا رمَّزنا مجموعة الأعداد الكمومية الموافقة لحالة كمومية محددة بالرمز $\nu$، فإن العلاقة العامة لكثافة الحالات تُعرف بالمساواة

$$\rho(E)=\sum_{\nu}\delta(E-E_{\nu}), \tag{36-6}$$

حيث $E_{\nu}$ الطاقة ذات الحالة الكمومية $\nu$.

ومن المفيد في هذا السياق إدخال تابع- $\delta$ ديراك الشهير:

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & \text{for } x\neq 0\,,\\ \infty, & \text{for } x\to 0\,,\end{cases} \tag{37-6}$$

علماً بأن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx=1\,. \tag{38-6}$$

يُستعمل تابع- $\delta$ ديراك عند إجراء تكامل. والقاعدة الرئيسة لمثل هذا التكامل هي:

$$\int_{a}^{b}\delta(x-x_0)\,\Phi(x)\,dx=\Phi(x_0),\quad \text{if } a<x_0<b\,, \tag{39-6}$$

حيث $\Phi(x)$ **تابع اختياري موصوف** جيداً.

وكمثالٍ بسيطٍ حول حساب كثافة الحالات $\rho(E)$، سنحسب باستخدام التعريف المتمثّل بالمعادلة (36-6)، هذه الكمية من أجل الإلكترونات المتوافرة في بلورة حجمية. الأعداد الكمومية من أجل حالة كهذه، كما رأينا سابقاً، هي $\{\vec{k},s\}$. إذا فرضنا أن الطاقة مستقلة عن السبين $E(\vec{k})=\dfrac{\hbar^2k^2}{2m^*}$ واستبدلنا الجمع بتكامل في المعادلة (25-6)،

$$\sum_{\vec{k}}(.....)=\frac{V}{(2\pi)^3}\iiint dk_x\,dk_y\,dk_z\,(.....)$$

، نحصل على المعادلة الآتية:

$$\rho_{3D}(E)=\frac{2V}{(2\pi)^3}\iiint\delta\left(E-E(\vec{k})\right)d\vec{k}\,. \tag{40-6}$$

وبما أن الطاقة $E(\vec{k})$، فعلياً، ترتبط بطويلة $\vec{k}$، فمن الممكن استعمال الإحداثيات الكروية؛ يُعطي التكامل على زاويتين القيمة $4\pi$ فيُختزل التكامل الثلاثي إلى تكامل أحادي:

$$\rho_{3D}(E)=\frac{2V}{(2\pi)^3}\times 4\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(E-E(\vec{k})\right)k^2 d\vec{k}\,. \tag{41-6}$$

نستبدل الآن التكامل على $k$ بالتكامل على الطاقة $E(\vec{k})=\varepsilon$ ونأخذ بالحسبان أن $k^2=\left(2m^*/\hbar^2\right)\varepsilon$ و $dk=\frac{1}{2}\sqrt{2m^*/\hbar^2}\;\varepsilon^{-1/2}\,d\varepsilon$، **فنحصل** باستعمال المعادلة (39-6) على المعادلة الآتية:

$$\rho_{3D}(E)=\frac{2V}{(2\pi)^3}\,2\pi\int_0^{\infty}\delta(E-\varepsilon)\left(2m^*/\hbar^2\right)\varepsilon\,\frac{1}{2}\sqrt{2m^*/\hbar^2}\;\varepsilon^{-1/2}\,d\varepsilon\,;$$

$$\rho_{3D}(E)=\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^{\infty}\delta(E-\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon}_{\sqrt{E}=\Phi(E)}=\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\Phi(E). \tag{42-6}$$

ومن ثمَّ:

$$\boxed{\rho_{3D}(E)=\frac{V}{\pi^2}\left(\frac{m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{2E}\,.} \tag{43-6}$$

يوضح الشكل (6a-6) كثافة الحالات هذه التي تم الحصول عليها من أجل إلكترونات **ثلاثية البعد**.

تشمل مجموعة الأعداد الكمومية من أجل الإلكترونات الموجودة في **بئرٍ كمومي** يُعطى طيفه الطاقي بالمعادلة (27-6)، **عدداً** كمومياً **سبينياً**، $s$، **وعدداً** كمومياً، $l_3$، **يصف التكميّة العرضانية** Transverse Quantization للحالات الإلكترونية **ومتجهاً** موجياً **مستمراً** Continuous ثنائي– البعد $\vec{k}_{||}$. ولهذا السبب، فإن $\nu=\left\{s,l_3,\vec{k}_{||}\right\}$.

يوجد تحلل سبيني ثنائي الطبقة لكل حالة، $\left(s=\pm\frac{1}{2}\right)$، ولذلك، فإن:

$$\boxed{\rho_{2D}(E)=2\sum_{l_3,k_x,k_y}\delta\left(E-\varepsilon_{l_3}-\frac{\hbar^2\left(k_x^2+k_y^2\right)}{2m^*}\right).} \tag{44-6}$$

ومن أجل حساب المجموع على $k_x$ و $k_y$ يمكننا تطبيق المعادلة (30-6) مع استبدال $S$ لتكون مساحة سطح البئر الكمومي؛ $S=L_x\times L_y$ حيث $L_x$ و $L_y$ بعدا البئر الكمومي في الاتجاهين $x$ و $y$ على الترتيب. وتُعطي حسابات التكاملات العلاقة الآتية:

$$\boxed{\rho_{2D}(E)=\frac{S\,m^*}{\pi\hbar^2}\sum_{l_3}\int_0^{\infty}\delta\left(E-\varepsilon_{l_3}-\varepsilon\right)d\varepsilon=\frac{S\,m^*}{\pi\hbar^2}\sum_{l_3}\Theta\left(E-\varepsilon_{l_3}\right).} \tag{45-6}$$

حيث $\Theta(x)$ تابع الخطوة (الدَرْجة) لهيفيسايد Heaviside Step-Function:

$$\Theta(x)=\begin{cases}1, & \text{for } x>0\,,\\ 0, & \text{for } x<0\,.\end{cases} \tag{46-6}$$

يشيع كثيراً استخدام كثافة الحالات في وحدة المساحة $\rho_{2D}(E)/S$ وليس كثافة الحالات بهدف التخلص من أبعاد العينة؛ **يوافق كل حدٍ** في المجموع الوارد في المعادلة (45-6) مساهمة **عصابة جزئية واحدة** ثمَّ إنَّ مساهمات كل العصابات الجزئية واحدة ومستقلة عن الطاقة. وبالنتيجة، **تُظهِر كثافة الحالات للإلكترونات ثنائية– البعد تابعية طاقية لها شكل دَرَجٍ** Staircase-Shaped، **تتعلق كل دَرْجةٍ** فيها بحالة طاقية واحدة من الحالات $\varepsilon_{l_3}$؛ وارتفاع كل خطوة في هذا الدرج عامٌ ويتعلق بالكتلة الفعَّالة الإلكترونية فقط.

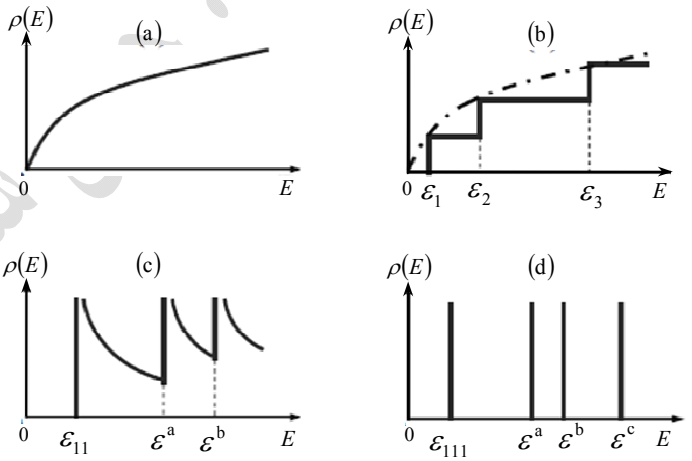
يوضح الشكل (6b-6) **كثافة الحالات ثنائية– البعد:** إذْ بمقارنة كثافات الحالات من أجل الإلكترونات في بلّوراتٍ حجميةٍ في وحدة الحجم، وبئرٍ كموميةٍ في وحدة المساحة يمكننا أن نرى أن الفوارق بين الحالتين؛ ثنائية البعد وثلاثية البعد تكون جليّةً في المناطق الطاقية للعصابات الجزئية الأخفض و**يكون التابع الدَّرَجي من أجل قيم** $l_3$ **الكبيرة قريباً جداً من المنحني الحجمي** $\rho_{3D}(E)$ ويتطابق معه تقاربياً Asymptotically.

وبشكلٍ مشابهٍ، **يمكننا إيجاد كثافة الحالات لغازٍ إلكترونيٍ أحادي البعد** ذي طيف طاقي يُعطى بالمعادلة (33-6)؛ ونتيجة الحساب تكون من الشكل الآتي:

$$\rho_{1D}(E)=\sum_{l_2,\,l_3}\rho_{l_2,l_3}(E),$$

حيث:

$$\rho_{l_2,l_3}(E)=\frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2}}\,\frac{1}{\sqrt{E-\varepsilon_{l_2,l_3}}}\,\Theta\left(E-\varepsilon_{l_2,l_3}\right), \tag{47-6}$$




**الشكل (6-6): كثافة الحالات من أجل الإلكترونات في أنظمةٍ مختلفة الأبعاد: (a) بلّورة حجمية، (b) حفرة كمون، (c) سلك كمومي، (d) نقطة كمومية. تُمثِّل المقادير $\varepsilon_1$ و $\varepsilon_{11}$ و $\varepsilon_{111}$ الحالات الأرضية في حفرة كمون و سلك كمومي ونقطة كمومية على الترتيب؛ $\varepsilon_2$ و $\varepsilon_3$ الحالات الطاقية الأعلى (المهيَّجة) في حفرة كمونٍ و $\varepsilon^a$ و $\varepsilon^b$ و $\varepsilon^c$ الحالات الأعلى في سلك كمومي ونقطة كمومية.**

حيث $L$ طول السلك.

يُظهر الشكل (6c-6) رسماً تخطيطياً $\rho_{1D}(E)$ من أجل إلكترونات أحادية– البعد؛ حيث **تكمن الصفة المميزة لكثافة الحالات الأحادية البعد في:**

- → **تباعدها بجوار** قاع كلٍ من العصابات الجزئية أحادية– البعد.
- → ثم إنَّ كثافة الحالات الإلكترونية **تتناقص** حالما **تزداد الطاقة الحركية** للإلكترونات؛
- → ويُعدُّ هذا السلوك مهماً جداً لكونه يؤدي إلى مفاعيل كهربائية وبصرية جديدة تمتاز بها الأسلاك الكمومية.

بمقدورنا الآن دراسة **حالة حديّة لكثافة الحالات من أجل إلكترونات صفرية– البعد**، أي من أجل إلكترونات تقع في **نقطٍ كموميةٍ** Quantum Dots؛ فتبعاً لتعريف المعادلة (6-36) تكون الأطياف الطاقية في حالة النقط أو الصناديق الكمومية منفصلة Discrete (أي متقطعةً)، وبالتالي، فإن كثافة الحالات ببساطة هي مجموعة قمم لها شكل التابع $\delta$ $(\delta-\text{ShapedPeaks})$، كما يوضح الشكل (6d-6). **تكون القمم من أجل جملةٍ مثاليةٍ ضيقة جداً وارتفاعاتها لانهائية:**

- في الواقع، إنّ التآثرات (أي التفاعلات المتبادلة) بين الإلكترونات والشوائب، فضلاً عن التصادمات مع اهتزازات الشبكة البلورية **تؤدي إلى تعرّض المستويات المتقطعة**،
- وبنتيجة ذلك، فإن القمم الموافقة من أجل جمل فيزيائية قابلة للتحقق تمتلك مطالات وتعرضّات محدودة (وليست لانهائية)؛
- غير أن النزعة الرئيسة المتمثِّلة في حِدَّة Sharpening تابعيات الكثافة الطيفية نتيجةً لتخفيض أبعاد الجملة المدروسة **هي مفعولٌ سائدٌ في درجات الحرارة المنخفضة** من أجل **التراكيب المثالية** Perfect Structures تقريباً.

إن **التغيرات الحادة** في كثافة الحالات الإلكترونية التي تحصل في بلورات محدودة الأبعاد (بمعنى **بلّورات حاصرة للحاملات**) **تُظهر نفسها** في مختلف التعديلات الرئيسة التي تطرأ على الناقلية، والخصائص البصرية، الخ. في الحقيقة، وكما سنرى لاحقاً، فإن هذه التغيرات التي تطرأ على كثافة الحالات تؤدي إلى ظواهر فيزيائية جديدة أيضاً.