كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : بصريات موجية

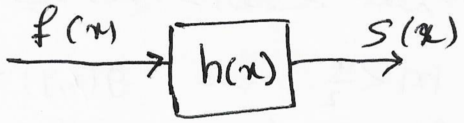
المحاضرة : الثالثة/نظري/د.اصف

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

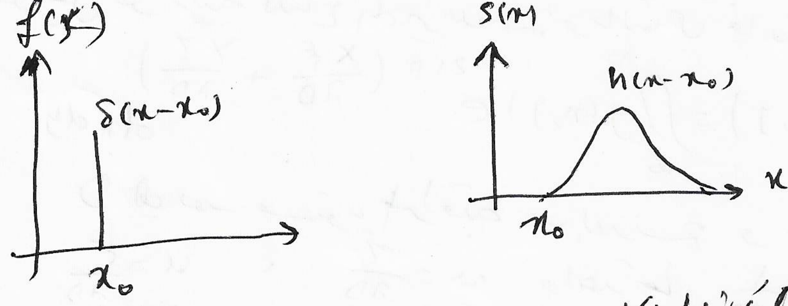
الالتفاف :

إن خيال نقطة في الأجهزة الضوئية لا يمكن أن يكون نقطة تماما بل بقعة حسب نوعية الجهاز صغيرة أو كبيرة وتدعى بقعة الانفراج وبالتالي لا يمكن فصل خيال نقطتين عن شكل نقطتين إلا إذا كانت المسافة بينهما أكبر من مسافة الصغرى



إذا كانت الاستجابة النبضية للجهاز $h(x)$ وكانت إشارة الدخل $f(x)$ فإنه بإمكاننا حساب إشارة الخرج $s(x)$ فإن حل هذه المسألة هو الالتفاف

مثلاً إذا كانت إشارة الدخل $\delta(x)$



فإننا نحصل على استجابة الجهاز للنبضة مسحوبة بالمقدار x_0 أي للنبضة الممثلة بالتابع $\delta(x-x_0)$ أي $h(x-x_0)$ كما في الشكل

فإن معادلة الالتفاف

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, h(x-x')\, dx'$$

وأيضاً تكتب بالشكل التالي أو بالرمز التالي

$$s(x) = f(x) \otimes h(x)$$

وتكتب معادلة الالتفاف بدلالة تحويل فورييه

$$TF[g_1(x) \otimes g_2(x)] = G_1(f_x)\, G_2(f_x)$$

حيث

$$G_1(f_x) = TF[g_1(x)] \quad , \quad G_2(f_x) = TF[g_2(x)]$$

أي أن تحويل فورييه يحول عملية الالتفاف التكاملية إلى عملية جداء طبيعية

وبالتالي فإن

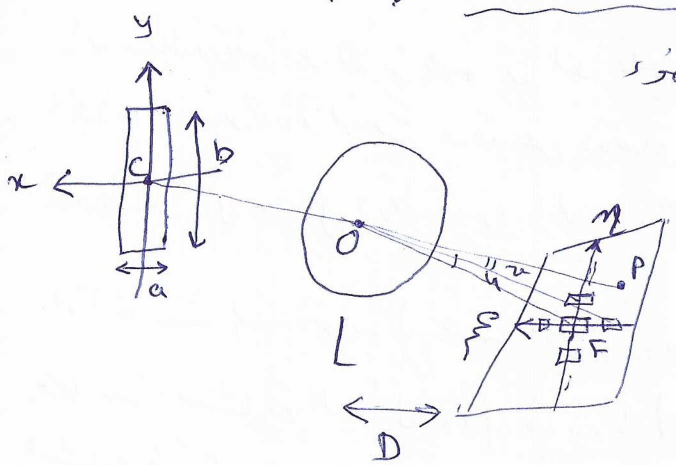
$$S(f_x, f_y) = G(f_x, f_y)\, H(f_x, f_y)$$

حيث H هو تحويل فورييه للاستجابة النبضية ذات المركز (x_0, y_0) أي

$$H(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_0, y_0)\, e^{-2i\pi(f_x x_0 + f_y y_0)}\, dx_0\, dy_0$$

يدعى التابع H بتابع النقل للنظام.

الانعراج في اللانهاية الناتج عن فتحة مستطيلة :



الفتحة مستطيلة a, b ويمر من خلالها الضوء
ويعبر عنها رياضياً للضوء بالتابع الرياضي الممثل للفتحة

$$g(x,y) = rect\left(\frac{x}{a}\right) rect\left(\frac{y}{b}\right)$$

وبالتالي فإن الصورة للفتحة تحقق ما يلي

$g(x,y) = 1$ عندما $|x| < \frac{a}{2}$ ، $|y| < \frac{b}{2}$

$g(x,y) = 0$ في أي نقطة أخرى من الفراغ

وبالتالي فإن سعة الموجة المنعرجة التي نحصل عليها في المستوي المحرقي للعدسة تعطى من تحويل فورييه للتابع المميز للفتحة وبالتالي فإن

$$G(\xi, \eta) = TF\, g(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, e^{-2i\pi\left(\frac{x\xi}{\lambda D} + \frac{y\eta}{\lambda D}\right)} dx\, dy$$

D هي بعد مستوي المراقبة عن العدسة وهو البعد المحرقي $D = OF$ فإذا فرضنا $u = \frac{\xi}{\lambda D}$ ، $v = \frac{\eta}{\lambda D}$ واحدتهما $\frac{1}{m}$ [تواتر مكاني]
وبالتالي فإن

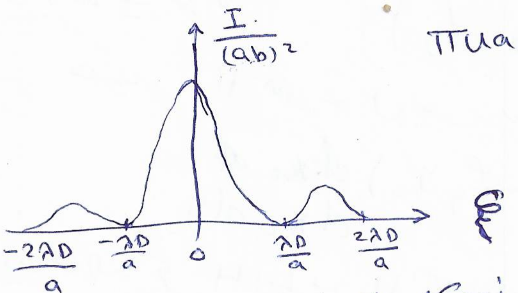
$$G(u,v) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2i\pi(xu + yv)} dx\, dy$$

$$= ab \frac{\sin(\pi u a)}{\pi u a} \frac{\sin(\pi v b)}{\pi v b} = ab\, \mathrm{sinc}\, \pi u a\, \mathrm{sinc}\, \pi v b$$

وبالتالي فإن السعة تتناسب مع المساحة ab وبالتالي فإن الشدة هي

$$I = |G(u,v)|^2 = (ab)^2\, \mathrm{sinc}^2 \pi u a \,.\, \mathrm{sinc}^2 \pi v b$$

إذا كان $b >> a$ فإن الشدة الملاحظة
$I = (ab)^2\, \mathrm{sinc}^2 \pi u a$ تمثل الشكل



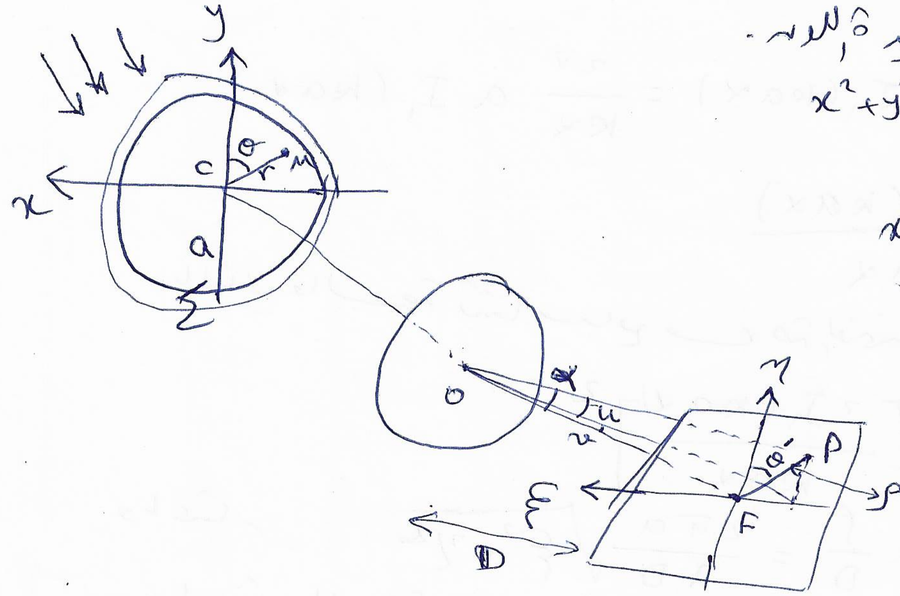
عند الذي إن المنعرجة تكون $\sin \pi u a = 0 \Leftarrow \pi u a = k\pi ; k = 1, 2, \ldots$

أي أن $u = \frac{k}{a} \Leftarrow$ $u = \frac{\xi}{\lambda D}$

$$\Rightarrow \xi = k \frac{\lambda D}{a}$$

أي أن الأهداب المظلمة تتناسب مواقعها عكساً مع عرض الشق a أي كلما كان a صغيراً كلما كانت الأهداب أكثر والعكس بالعكس.

الانفراج في اللانهاية الناتج عن فتحة دائرية:



عند إضاءة الفتحة بموجة مستوية وحيدة اللون.

طرف الفتحة تحدده الدائرة $x^2+y^2=a^2$

وبالتالي يعرف تابع العبور بالشكل

$f(x,y)=1$ عندما $x^2+y^2\le a^2$

$f(x,y)=0$ عندما $x^2+y^2>a^2$

وجدنا سابقاً أن سعة الموجة المنعرجة والتي تعطى بـ تحويل فورييه لتابع العبور هي

$$F(\xi,\eta)=TF[f(x,y)]=\iint_{\Sigma} e^{-2i\pi\left(\frac{x\xi}{\lambda D}+\frac{y\eta}{\lambda D}\right)}dx\,dy$$

حيث $\overline{OF}=D$ و Σ محيط الفتحة الدائرية فباستخدام الإحداثيات القطبية

$r=\overline{CM}$; $y=r\cos\theta$; $x=r\sin\theta$; $M(x,y)$ و

$\rho=\overline{FP}$ و $\eta=\rho\cos\theta'$; $\xi=\rho\sin\theta'$; $P(\xi,\eta)$

فإن الأس بهذا الشكل يكون

$$-i\frac{2\pi}{\lambda}\left(x\frac{\xi}{D}+y\frac{\eta}{D}\right)=-i\frac{kr\rho}{D}(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta')$$

$$=-ikr\alpha\cos(\theta-\theta') \quad ; \quad \frac{\rho}{D}=\tan\alpha\approx\alpha$$

$$dx\,dy=r\,dr\,d\theta$$

وبالتالي صورة الانفراج للفتحة الدائرية

$$F(\alpha)=\int_0^a\int_0^{2\pi}e^{-ikr\alpha\cos(\theta-\theta')}r\,dr\,d\theta=\iint_0^{a\ 2\pi}e^{-ikr\alpha\cos\Theta}r\,dr\,d\Theta$$

حيث $\Theta=\theta-\theta'$

إذا أخذنا الجزء المتعلق بـ Θ

$$\int_0^{2\pi}e^{-ikr\alpha\cos\Theta}d\Theta=2\pi J_0(kr\alpha)$$

حيث J_0 تابع بيسل من المرتبة صفر ويكون

$$F(\alpha)=2\pi\int_0^a J_0(kr\alpha)\,r\,dr \quad ; \quad J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix\cos\alpha}d\alpha$$

وإذا كان J_1 تابع بيسل من المرتبة الأولى فإن

$$\int_0^{ka\alpha}J_0(kr\alpha)(kr\alpha)\,d(kr\alpha)=ka\alpha\,J_1(ka\alpha)$$

وبالتالي فإن

$$F(\alpha) = \frac{2\pi}{k^2\alpha^2}\int_0^{ka\alpha} J_0(kr\alpha)(kr\alpha)\,d(kr\alpha)$$

$$= \frac{2\pi}{k^2\alpha^2}\,ka\alpha\, J_1(ka\alpha) = \frac{2\pi}{k\alpha}\,a\,J_1(ka\alpha)$$

$$= \pi a^2\,\frac{2J_1(ka\alpha)}{ka\alpha}$$

وبالتالي فالسعة تتناسب مع مساحة الفتحة الدائرية أما الشدة

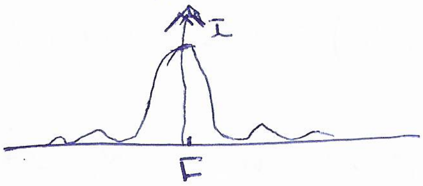
$$I = (\pi a^2)^2\left[\frac{2J_1(ka\alpha)}{ka\alpha}\right]^2$$

وباعتبار

$$z = ka\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}a\frac{\rho}{D} = \frac{2\pi a}{\lambda D}\sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

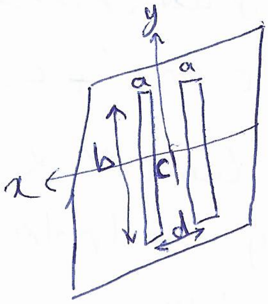
وباعتبار المساحة $= 1 = \pi a^2$

$$I = \left[\frac{2J_1(z)}{z}\right]^2$$



الانعراج في اللانهاية الناتج عن شق مضاعف :

درسنا سابقاً عن الشق الواحد وسندرس الآن عن الشقين عرض كل منهما a وطول b والبعد بين مركزيهما d



اعتماداً على تعريف تابع ديراك والالتفاف فإنه يمكن التعبير عن الشق المسحوب بالمقدار $\frac{d}{2}$ بالعلاقة

$$f_1(x,y) = \mathrm{rect}\left[\frac{x}{a}\right]\mathrm{rect}\left[\frac{y}{b}\right] \otimes \delta\left(x-\frac{d}{2}\right)$$

ومن الشق المسحوب بالمقدار $-\frac{d}{2}$

$$f_2(x,y) = \quad \delta\left(x+\frac{d}{2}\right)$$

والصورة الذي يعبر عن كلا الشقين يساوي مجموع التابعين

$$f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y) = \mathrm{rect}\left[\frac{x}{a}\right]\mathrm{rect}\left[\frac{y}{b}\right] \otimes \left[\delta\left(x-\frac{d}{2}\right)+\delta\left(x+\frac{d}{2}\right)\right]$$

إن تحويل فورييه يحول الالتفاف إلى جداء وإن سعة الموجة المنعرجة تتناسب مع تحويل فورييه لتابع العبورية فتصبح السعة

$$F(u,v) = TF\,f(x,y) = TF\left[\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{b}\right)\right]\cdot TF\left[\delta\left(x-\frac{d}{2}\right)+\delta\left(x+\frac{d}{2}\right)\right]$$

إن تحويل فورييه لتابع الشق هو $ab\,\mathrm{sinc}(\pi ua)\,\mathrm{sinc}(\pi vb)$ وهذا تعرضنا له نظراً 2

أما تحويل فورييه لتابعي ديراك المسحوبين بمقدار $\frac{d}{2}$ فقد وجدنا أنه يساوي $2\cos(\pi ud)$ وهذا يعبر عن التداخل

حيث فرضنا أن $U=\frac{\xi}{\lambda D}$ ، $V=\frac{\eta}{\lambda D}$ ، $D=\overline{OF}$

وبالتالي

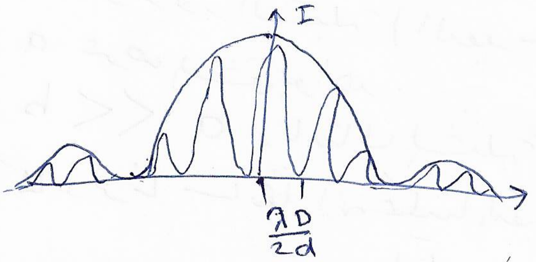
$$F(u,v)=2ab\,\text{Sinc}(\pi u a)\,\text{Sinc}(\pi v b)\cos(\pi u d)$$

وبالتالي الشدة تعطى

$$I=4a^2b^2\,\text{Sinc}^2 \quad \text{Sinc}^2 \quad \cos^2$$

وفي حالة $a<<b$ فإن ما نشاهده على المحور العمودي η معدوم ولا نشاهد إلا تجمع للإضاءة ممتداً على المحور الأفقي وبالتالي الشدة تعطى

$$I=4a^2b^2\,\text{Sinc}^2(\pi u a)\cos^2(\pi u d)=I_0\,\text{Sinc}^2(\pi u a)\left[1+\cos 2\pi u d\right]$$



ملاحظة: نقطة أهداب التداخل تنعدم عندما يكون $\cos 2\pi u d=-1 \Rightarrow 2\pi u d=(2k+1)\pi \Rightarrow u=\frac{2k+1}{2d}$

حيث $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

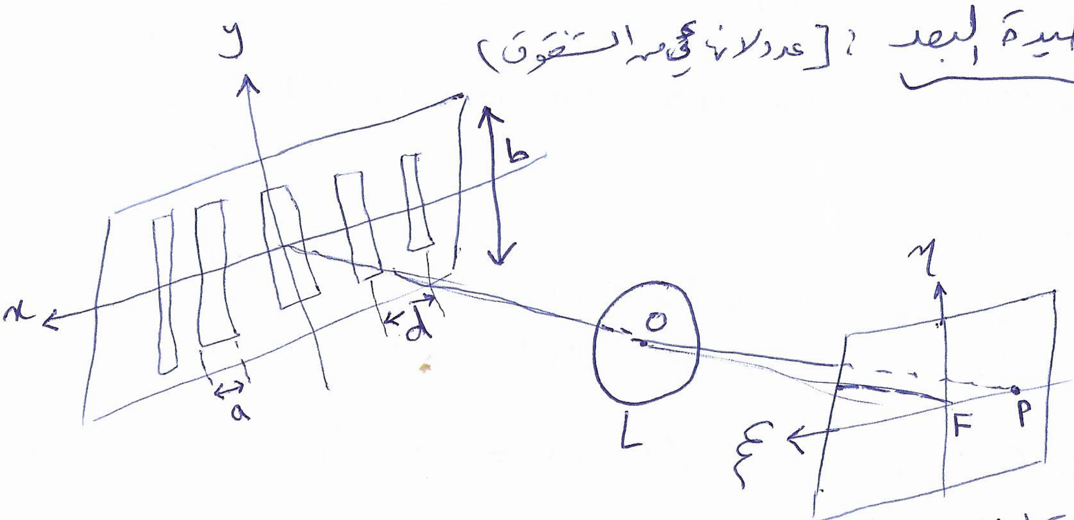
وبالتالي باعتبار $u=\frac{\xi}{\lambda D}=\frac{2k+1}{2d} \Rightarrow \boxed{\xi=\frac{(2k+1)\lambda D}{2d}}$

وتكون الأهداب أعظمية عندما $\cos(2\pi u d)=1 \Rightarrow 2\pi u d=2k\pi \Rightarrow k=ud \Rightarrow k=\frac{\xi}{\lambda D}d$

وبالتالي

$$\boxed{\xi=\frac{k\lambda D}{d}}$$

<u>شبكة الانعراج وحيدة البعد</u> : [عدد لانهائي من الشقوق]



d هو دور الشبكة (البعد بين مركزي شقين متتاليين)

a عرض الشق الواحد.

$b >> a$ وبالتالي الشبكة وحيدة البعد (الانعراج يحدث في اتجاه المحور ξ)

كما ذكرنا سابقاً إن عملية التعبير عن الشق المسحوب بالمقدار d بالعلاقة

$$\text{rect}\left[\frac{x}{a}\right] \otimes \delta(x \pm d)$$

وإذا عبرنا عن جميع الشقوق المسحوبة $(\pm d, \pm 2d, \ldots, \pm nd)$ وجمعنا الناتج وأخذنا بعين الاعتبار أن الالتفاف عملية توزيعية نحصل على

$$f(x) = \text{rect}\left[\frac{x}{a}\right] \otimes \left[\delta(x) + \delta(x-d) + \delta(x-2d) + \ldots + \delta(x-nd) + \delta(x+d) + \ldots + \delta(x+nd)\right]$$

$$= \text{rect}\left[\frac{x}{a}\right] \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nd)$$

تبتعد عن بعضها بالمقدار d [شبيه بالمشط]

وبرهنا سابقاً أن سعة الموجة التي نشاهدها في مستوي المراقبة تتطابق مع تحويل فورييه

$$F(u) = TF[f(x)] = TF\left[\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-nd)\right]$$

$$= a\,\text{Sinc}(\pi u a) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi u n d}$$

$$= a\,\text{Sinc}(\pi u a) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cancel{e^{-2i\pi u n d}}\, \delta\left(u - \frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a\,\text{Sinc}(\pi u a)\, \delta\left(u - \frac{n}{d}\right)$$

تحتوي هذه العبارة أهداب الفراغ وأهداب التداخل ولكن بشكل مشط تبعد أسنانه عن بعضها بالمقدار $u = \frac{1}{d}$ أو $\xi = \frac{\lambda D}{d}$

وما يراه الإنسان هو الشدة كما تظهر في الشكل