كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : كهرباء ومغناطيسية٢

المحاضرة : **الثانية/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

2024 2025

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٩

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المحاضرة الثانية

• ملاحظات مهمة:

1 - إذا كان الفيض الناشئ في أحد الملفين لا يقطع الملف الآخر نظراً لابتعاد بعضهما عن بعض فإن $M = 0$ ويكون الحث الذاتي المكافئ طبقاً للمعادلتين (★) و (★★):

$$L = L_1 + L_2 \quad (1)$$

2 - بطرح المعادلة (★★) من المعادلة (★) ينتج أن الحث المتبادل بين الملفين هو:

$$M = \frac{1}{4}(L' - L'') \quad (2)$$

3 - إذا كان الملفان ملفوفين على قلب حديدي كما هو الحال في محول التيار فإن الملفات تكون ملاصقة مما يجعل التدفق الناتج عن أحد الملفين يتصل كله (عملياً) بالملف الآخر، عندئذ يمكن الحصول من تعريف الحث الذاتي، من المعادلة $L = \frac{N\Phi}{I}$، والحث المتبادل معادلة على مايلي: $M = \frac{N_2 \Phi_{2-1}}{I_1}$ ، $M = \frac{N_1 \Phi_{1-2}}{I_2}$

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} \; ; \; L_2 = \frac{N_2 \Phi_2}{I_2} \; ; \; M = \frac{N_1 \Phi_2}{I_2} = \frac{N_2 \Phi_1}{I_1}$$

$$\therefore M^2 = \frac{N_1 \Phi_2 \times N_2 \Phi_1}{L_2 \times L_1} = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} \times \frac{N_2 \Phi_2}{I_2} = L_1 \times L_2$$

أي أن:

$$M = \sqrt{L_1 \times L_2} = (L_1 \times L_2)^{1/2} \quad (3)$$

أي أن الحث المتبادل بين ملفين يساوي الجذر التربيعي لحاصل ضرب حثهما الذاتي وذلك عند تلاصق الملفين.

4 - يقاس الحث الذاتي والحث المتبادل عملياً باستخدام دوائر التيار المتردد، ويمكن أيضاً قياسها باستخدام التيار المستمر.

2 - وصل ملفات الحث على التوازي: Inductors in parallel

وإذا فرض أن الملفين، شكل متصلان على التوازي فإن هذه الحالة تتفرع التيار I بين الملفين ويكون التيار الكلي مساوياً إلى:

$$I = I_1 + I_2 \quad (4)$$

حيث I_1 التيار المار في الملف الذي حثه الذاتي L_1 و L_2 والتيار المار في الملف الذي حثه الذاتي L_2. ويكون معدل تغير التيار الكلي بالنسبة للزمن مساوياً لمجموع معدل تغير كل من I_1 و I_2 ويتم ذلك بتفاضل المعادلة (4) بالنسبة للزمن:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \quad (5)$$

وبتعويض في المعادلة: $\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$ يكون:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{L}, \quad \frac{dI_1}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_1}{L_1}, \quad \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_2}{L_2}$$

وبالتعويض في (5) مع ملاحظة أن $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ نجد أن:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

وإذا كان هناك عدد من الملفات n يزيد على اثنين فإن العلاقة الأخيرة يمكن كتابتها بالصورة التالية

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

ويتم هذا بشرط أن تقوم باتخاذ احتياطات معينة لمنع تأثير المجالات المغناطيسية لهذه الملفات بعضها على بعض مثلاً لا يحدث ارتباط مغناطيسي بينها بترتيب التأثير المتبادل.

• سريان التيار في دائرة حثية: Current in an Inductive circuit

1- نمو التيار: Growth of current

عند توصيل مصدر كهربائي جهده ثابت ومقداره V فولت إلى دائرة لا مقاومة R أوم وليس لها حث ذاتي (لعلمنا أن أجزاء الدائرة المختلفة لا تنتج أي مجال مغناطيسي) فإن شدة التيار الذي يمر بالدائرة يخضع لقانون أوم أي أن:

$$I = \frac{V}{R}$$

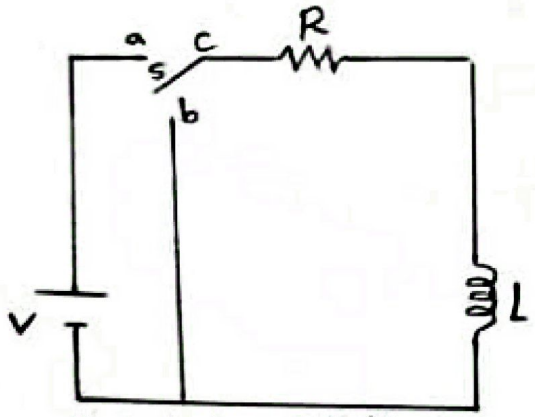
يبلغ هذا التيار هذه القيمة في اللحظة نفسها التي تقفل فيها الدارة أي أنه لا يستغرق أي وقت في نموه، وذلك لعدم وجود أي عائق يعوق هذا النمو.

• أما إذا كانت الدارة تحتوي على ملف له حث ذاتي L، ومقاومة R فإن المجال المغناطيسي الذي ينشأ في الملف كما في الشكل (1) يمنع التيار من أن يتولد قوة دافعة كهربائية معاكسة تعمل على عامل الحث الذاتي L ومعدل نمو التيار $\frac{dI}{dt}$ حيث I هي شدة التيار المار في الدارة عند اللحظة t اعتباراً من لحظة قفل الدارة. ويجب أن يكون الجهد V في هذه الحالة مركباً من إحداهما للتغلب على هبوط الجهد IR في المقاومة والأخرى لموازنة القوة الدافعة الكهربائية المعاكسة $L.\frac{dI}{dt}$. ومن ثم نأتي بمعادلة توزيع الجهد هي:

$$V = IR + L\frac{dI}{dt} \quad (6)$$

ونضرب طرفي المعادلة في $I.dt$ يمكن الحصول على:

$$VIdt = I^2R.dt + LI.dt\left(\frac{dI}{dt}\right)$$



الشكل (1): مصدر كهربائي ثابت متصل بمقاومة R وملف L.

يمثل المقدار $(V.I.dt)$ كمية الطاقة (energy) التي تأخذها الدارة الكهربائية من المصدر في الزمن (dt) ويمثل $I^2.R.dt$ الطاقة التي تتبدد في الدارة على شكل طاقة حرارية في المقاومة (R) كما أن $L.I.dt.\left(\frac{dI}{dt}\right)$ تمثل الطاقة التي تستخدم في بناء المجال المغناطيسي في الزمن dt وتختزن فيه. وتظل الأمور تسير على هذا النحو حتى يبلغ التيار قيمته النهائية فيقف نمو المجال المغناطيسي عند قيمة ثابتة (I_{max}) فتصبح قيمة $\frac{dI}{dt}$ مساوية الصفر عندئذ يقف نمو المجال المغناطيسي وتصبح الطاقة التي يعطيها المصدر الكهربائي في الدارة مساوية الطاقة الحرارية التي تبدد في المقاومة وتخضع الدارة لقانون أوم أي أن:

$$V = I_{max}.R$$

$$V.I_{max}.dt = I^2_{max}.R.dt$$

وبحل المعادلة التفاضلية نحصل على قيمة التيار I عند أي لحظة t خلال فترة نمو التيار بعد قفل الدائرة بإتصال S بـ a، شكل(1)، ويتم ذلك كما يلي:

$$\frac{L}{R}\cdot\frac{dI}{dt}+\left(I-\frac{V}{R}\right)=0 \quad (7)$$

• يمكن إعادة كتابة المعادلة (6) على الشكل التالي:

وبوضع $y=I-\frac{V}{R}$ يمكن الحصول على:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dI}{dt}$$

وبالتعويض في المعادلة (7) يكون:

$$\frac{L}{R}\cdot\frac{dy}{dt}+y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{R}{L}\,dt$$

وبتكامل هذه المعادلة يمكن الحصول على:

$$\ln y=\frac{R}{L}t+\text{constant}$$

$$\ln\left(I-\frac{V}{R}\right)=-\frac{R}{L}t+\text{constant}$$

ويجب متابعة التكامل بمعرفة الشرط الابتدائي:

فعند البداية يكون $I=0$ عندما $t=0$ ومن ذلك يمكن الحصول على:

$$\ln\left(-\frac{V}{R}\right)=\text{constant}\ ,\ \ln\left(I-\frac{V}{R}\right)=-\frac{R}{L}t+\ln\left(-\frac{V}{R}\right)$$

أو:

$$\ln\left(\frac{I-\frac{V}{R}}{-\frac{V}{R}}\right)=-\frac{R}{L}\cdot t$$

أو

$$\left(I-\frac{V}{R}\right)=-\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\Rightarrow I=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (8)$$

أو

$$I=I_{max}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (9)$$

حيث I_{max} هي القيمة النهائية الثابتة للتيار الذي يمر في الدائرة ويلاحظ على المعادلة (9) أنه عند $t=0$ أي عند قفل الدائرة فإن التيار $I=0$ أما عند الزمن اللانهائي أي $t=\infty$ فإن $I=I_{max}$

• يبلغ التيار قيمته النهائية بعد زمن قصير.

• يمكن الحصول على معدل تغير التيار بالنسبة للزمن بمفاضلة المعادلة (9):

$$\frac{dI}{dt}=\frac{V}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \quad (10)$$

• ويكون معدل تغير التيار لحظة قفل الدائرة أي عند $t=0$ هو:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0=\frac{V}{L}$$

وهذا هو أكبر معدل لتغير التيار ويكون الجهد على الجزء الحثي في الدارة من الحلقة التي تحتوي الدارة هو:

$$V = L\left(\frac{dI}{dt}\right)_0$$

أي أن الجهد المقاوم في هذه الحالة يساوي الصفر.

ويلاحظ أن المقدار $\frac{L}{R}$ له أبعاد الزمن لأن:

$$\frac{L}{R} = \frac{H}{\Omega} = \frac{V/(A/S)}{V/A} = S$$

وإذا عوضنا في المعادلة (9) بالقيمة $\frac{L}{R} = t$ نجعل مع قيمة التيار المعتمد على مقداره $\frac{L}{R}$ ثابتة ويرمز له بالرمز T كما يطلق عليه اسم ثابت الزمن (time constant) وتكون قيمة التيار المطلوبة هي:

$$I = I_{max}(1 - e^{-1}) = 0,632\, I_{max}$$

ويُعرف ثابت الزمن عندئذٍ بأنه الزمن الذي يستغرقه التيار لكي يصل إلى 0,632 من قيمته النهائية الثابتة.

ويمكن كتابة المعادلة (10) على الشكل التالي:

$$L \cdot \frac{dI}{dt} = V e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

أو

$$\varepsilon = V e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \qquad (11)$$

حيث ε القوة الدافعة المستحثة.

2 - اضمحلال التيار (Decay of the current)

نفرض أنه بعد وصول التيار إلى قيمته الثابتة النهائية (I_{max}) فُتح المفتاح S كما في الشكل (1) من النقطة a ووصل بالنقطة b، أي أن القوة الدافعة V البطارية أصبحت مستبعدة وبذلك تؤول المعادلة (6) إلى:

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + IR = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\, dt$$

وبتكامل هذه المعادلة يمكن الحصول على:

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + \text{constant} \qquad (13)$$

ويجب ثابت التكامل بمعرفة الشروط الابتدائية فعندما $I = I_{max}$, $t = 0$ أي لحظة بدء انقطاع التيار:

$$\ln I_{max} = \text{constant}$$

وبالتعويض في المعادلة (13) نجعل على:

$$I = I_{max} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \qquad (14)$$

ولهذه هي معادلة انحلال التيار لدارة حث ومقاومة وسمي المقدار $\frac{L}{R}$ بثابت الزمن كما ذكر سابقاً وإذا عوضنا عن $t = \frac{L}{R}$ في المعادلة (14) نجد أن:

$$I = I_{max} \cdot e^{-1} = 0,368\, I_{max}$$

وبهذا يمكن تعريف ثابت الزمن بأنه (الزمن اللازم لوصول التيار إلى 0,37 من قيمته العظمى)

ولضرب طرفي المعادلة (12) في $I.dt$ نحصل على معادلة الطاقة:

$$L.I.\left(\frac{dI}{dt}\right).dt + I^2.R.dt = 0$$

وبفتح هذه المعادلة نجد أن الطاقة التي تبددها المقاومة على شكل طاقة حرارية مستمدة من الطاقة المختزنة في المجال المغناطيسي وبذلك فإن الطاقة في المجال المغناطيسي تكون قد استنفذت عندما تصبح قيمة التيار صفراً.

- طاقة الحث: Energy Associated wit a Inductor

تتحول الطاقة المبذولة بواسطة البطارية في حالة بناء التيار في الدارة المبينة في الشكل (1) إلى:

أ- طاقة يختزنها الملف وتظهر منه على هيئة مجال مغناطيسي.

ب- طاقة تستهلك في المقاومة R وتظهر على هيئة حرارة.

وبضرب طرفي المعادلة (6) بشدة التيار يمكن الحصول على:

$$IV = I^2.R + LI\,\frac{dI}{dt}$$

حيث IV يمثل معدل بذل الطاقة أو القدرة "Power" بواسطة البطارية و $I^2.R$ يمثل معدل تولد الطاقة الحرارية أي القدرة المستهلكة في المقاومة و $LI.\frac{dI}{dt}$ يمثل القدرة اللازمة لبناء مجال مغناطيسي للملف التي تمثل معدل بذل الطاقة لبناء المجال فقرة نمو التيار، وعندما يصل التيار إلى قيمته النهائية (I) فإن $\frac{dI}{dt} = 0$ ويقف إمداد الملف بالطاقة التي سنرمز لها بالرمز (W).

وتكون معدل بذل الطاقة (القدرة) لبناء التيار أي لبناء المجال المغناطيسي هي:

$$P = \frac{dW}{dt} = LI.\frac{dI}{dt} \quad ; \quad dW = LI.dI$$

ونحصل على الشغل الكلي لبناء التيار من الصفر إلى I بتكامل هذه المعادلة:

$$W = \int dW = \int_0^I LI\,dI = \frac{1}{2}LI^2 \quad (15)$$

وهذه الطاقة تختزن في الملف على هيئة مجال مغناطيسي ويرمز لها عادة بالرمز U.

لهذا وقد افترضنا أن الملف والمقاومة هما عنصران منفصلان في الدارة المبينة شكل (1) ولكن القوانين التي استنتجت صحيحة أيضاً في الحالة التي يمر فيها التيار في ملف له مقاومة R وحث ذاتي L.

وإذا كانت لدينا دارتان، كما في الشكل (2) في المحاضرة السابقة، فإن الطاقة المختزنة لبناء التيارين I_1 و I_2 يمكن الحصول عليها من المعادلة (*) حيث:

$$dU = L_1 . I_1 . dI_1 \pm M I_1 dI_2 \pm M I_2 . dI_1$$

$$d(M I_1 . I_2) = M I_1 dI_2 + M I_2 . dI_1$$

$$dU = L_1 . I_1 . dI_1 + L_2 I_2 dI_2 \pm d(M I_1 I_2)$$

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 . I_2^2 \pm M I_1 I_2 \quad (16)$$

• كثافة الطاقة لمجال مغناطيسي Energy density of a magnetic field

توضح المعادلة (16) الطاقة اللازمة لبناء مجال مغناطيسي في ملف فإذا افترضنا أن طول الملف L ومساحة مقطعه S وعدد لفاته N وكان الملف طويلاً بحيث يمكن اهمال المجال المغناطيسي خارجه واعتبار أن المجال المغناطيسي كله يخترق بانتظام محور الملف فإن الطاقة كلها ستكون مخزونة في حجم أسطواني (SL) وتكون الطاقة في وحدة الحجوم، كثافة الطاقة (energy density) هي:

$$U = \frac{L . I^2}{2 l S} \quad (17)$$

ولدينا سابقاً: $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$ ، $B = \frac{\mu_0 N . I}{l}$

وبالتعويض في المعادلة (17):

$$U = \frac{1}{2\mu_0} . B^2$$

حيث إن $B = \mu_0 . H$ (H شدة المجال المغناطيسي)

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 . H^2 = \frac{1}{2} B H \quad (18)$$

وإذا كان الملف ملفوفاً حول مادة معامل نفاذيتها μ_r فإن $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ حيث μ_r معامل النفاذية النسبية

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \mu_r H^2$$

تعتبر المعادلة (18) معادلة عامة وتمثل كثافة أي طاقة لوحدة الحجوم في أي مجال مغناطيسي مهما كان شكل هذا المجال ومصدره.

مسألة (1):

ملف حثه الذاتي 3 هنري ومقاومته 6 أوم متصل على التوالي ببطارية قوتها الدافعة 12 فولت ومقاومتها الداخلية مهملة.

احسب: 1- معدل نمو التيار بمجرد غلق الدارة

2- معدل نمو التيار عندما تصل شدته إلى 1 أمبير.

3- شدة التيار بعد انقضاء زمن قدره 0,2 ثانية على غلق الدارة

4- الطاقة المخزونة في هذا الملف بعد وصول التيار إلى قيمته المستقرة.

الحل: يمكن كتابة المعادلة (6) بالشكل التالي:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{R}{L} \cdot I$$

وكما هو المطلوب (1) فإنه بمجرد غلق الدارة يكون:

$$I = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{12}{3} = 4 \ (A/S)$$

2-

$$\frac{dI}{dt} = \frac{12}{3} - \frac{6}{3} \times 1 = 2 \ A/S$$

3-

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{12}{6}\left(1 - e^{-\frac{6}{3} \times 0,2}\right) = 0,65A$$

4-

$$U = \frac{1}{2} L I_{max}^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{12}{6}\right)^2 = 6 \ J$$

مسألة 2

ملف صافي الذاتي 3 هنري يتصل على التوالي لمقاومة 10 أوم وبطارية قوتها الدافعة 3 فولت ومقاومتها الداخلية مهملة والمطلوب حساب مايلي بعد انقضاء زمن قدره 93 ثانية على غلق هذه الدارة.

1- القدرة المبددة من البطارية.

2- القدرة المستهلكة في المقاومة.

3- القدرة اللازمة لبناء التيار في الملف.

الحل: $I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{3}{10}\left(1 - e^{-\frac{10}{3}\times 0,3}\right) = 0,189\ A$

من المعادلة التالية: $I V = I^2 . R + L I . \frac{dI}{dt}$

يكون $P = P_R + P_L$ حيث P القدرة المبددة من البطارية

1- $P = IV = 0,189 \times 3 = 0,567\ W$

2- و P_R القدرة المستهلكة في المقاومة R على هيئة حرارة (المطلوب 2)

$P_R = I^2 . R = (0,189)^2 \times 10 = 0,357\ W$

و P_L القدرة المبددة في الملف. $P_L = L . I . \frac{dI}{dt}$

ولمعرفة P_L يتطلب حساب $\frac{dI}{dt}$ باشتقاق المعادلة A نحصل على:

$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{3}{3} e^{-1} = 0,37\ A/s$

$P_L = 3 \times 0,189 \times 0,37 = 0,21\ W$

ويلاحظ أنه يمكن الوصول إلى هذه النتيجة بمعلومية P و P_R حيث:

$P_L = P - P_R = 0,567 - 0,357 = 0,21\ W$

• شحن وتفريغ مكثف خلال ملف حثي

charging and Discharging capacitor Through Inductive coil

يمثل الشكل (2) دارة متكونة من ملف L ومقاومة R ومكثف C وبطارية جهدها V متصلة فيما بينها على التوالي. يتم الشحن بتوصيل الدارة (2-أ) ويتم التفريغ بتوصيل الدارة (2-ب) بعد شحن المكثف.

بتطبيق قانون كيرشوف الخاص بتوزيع الجهد على الدارتين نحصل على:

1- في حالة الشحن يكون توزيع الجهد كالتالي: (19)

$$R I + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = V$$

$$\because I = \frac{dq}{dt} \Longrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{V}{L}$$

2- أما في حالة التفريغ فيحذف جهد البطارية من المعادلة (19) ونجد:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (20)$$

ومن الواضح أن المعادلتين (19) و (20) معادلتان تفاضليتان نحتاج إلى الحل مناسب لمعرفة سلوك الشحنة مع الزمن وكذلك التيار، وسنبدأ أولاً بحل المعادلة (20) في حالة التفريغ.

أولاً: التفريغ

نحل المعادلة (20) بافتراض حل خاص لها وهو:

$$q = A e^{\lambda t}$$

$$\frac{dq}{dt} = \lambda \cdot A e^{\lambda t} \quad \& \quad \frac{d^2q}{dt} = \lambda^2 \cdot A e^{\lambda t}$$

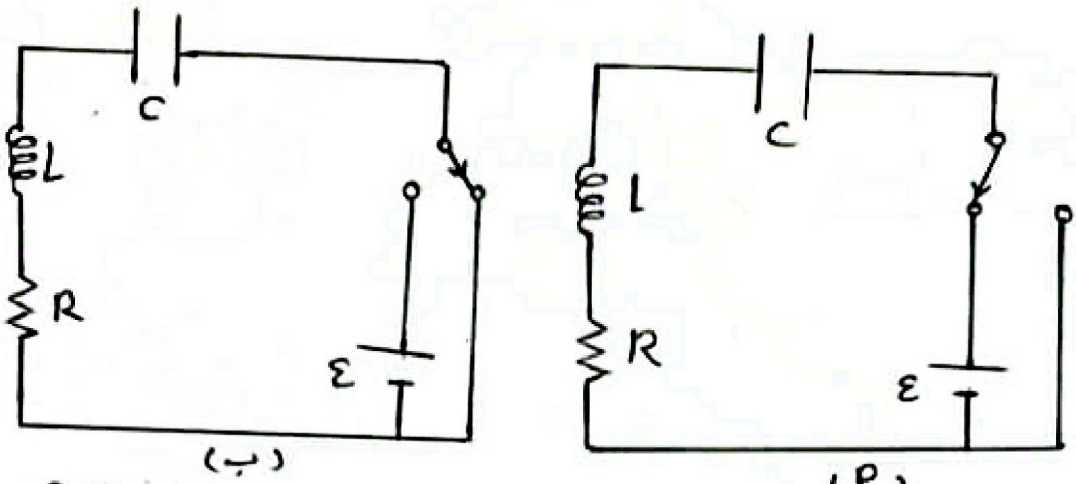
وبالتعويض في المعادلة (20) نحصل على

$$\lambda^2 \cdot A e^{\lambda t} + \frac{R}{L} \lambda e^{\lambda t} + \frac{1}{LC} A \cdot e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta = 0$$

هذه المعادلة من الرتبة الثانية والمعاملان $\alpha = \frac{R}{L}$ و $\beta = \frac{1}{LC}$ يُعرفان بثابتي التوهين (attenuation constant)



شكل (2) : دارة تحتوي على مكثف C وملف L ومقاومة R متصلة على التوالي ببطارية
(ب) حالة التفريغ
(P) حالة الشحن

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2} \qquad (20)'$$

وجذرا هذه المعادلة هما :

ومن هذه المعادلة يتضح أن الحل للمعادلة (20) يكون على الشكل التالي :

$$q = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_1 t} \qquad (21)$$

$$I = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

أما الشكل الزائي لقيمة الشحنة الكهربية وكذلك التيار فإنه يعتمد على قيمة المقدار الذي يقع تحت الجذر فقد يكون موجباً أو صفراً أو سالباً أي $R^2 > = < \frac{4L}{C}$

وسنبين كلاً منها كالتالي :

P - بافتراض أن $R^2 > \frac{4L}{C}$

في هذه الحالة تكون قيم λ_1 و λ_2 حقيقية . ويمكن معرفة A_1 و A_2 من الشروط الابتدائية حيث

$$t = 0 \; , \; I = 0 \; , \; q = q_0$$

وبالتعويض في المعادلتين (21) نحصل على :

$$A_1 + A_2 = q_0 \; ; \; A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2(\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}} \cdot q_0 \; ; \; A_2 = \frac{-\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2(\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}} \cdot q_0$$

وبالتعويض عن A_1 في المعادلة (21) نحصل على:

$$q = \frac{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}}{2\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)} \cdot q_0 \cdot e^{\frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}\right\}t} +$$

$$+ \frac{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}}{2\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}} \cdot q_0 e^{\frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}\right\}t}$$

$$I = \frac{V}{\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{L}t} \cdot \left\{ e^{\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}t} - e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}t} \right\}$$

$$\Rightarrow I = \frac{V}{\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)^{1/2}} \cdot e^{\frac{-1}{2}\frac{R}{L}t} \cdot 2\sinh\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2} t$$

ب - بافتراض أن $R^2 = \frac{4L}{C}$:

ويكون الجذران في هذه الحالة متساويين أي أن:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{2}\frac{R}{L}$$

ومع ذلك سيفترض أن الجذرين غير متساويين بحيث يكون قيمتهما λ ، $\lambda + h$ حيث $h \to 0$ وبذلك يمكن أن يكون الحل كما يلي:

$$q = (A + Bt)e^{\lambda t} \quad , \quad I = (A + Bt)\lambda \cdot e^{\lambda t} + Be^{\lambda t}$$

وبتطبيق الشروط الابتدائية نحصل على قيمتي A و B حيث:

$$A = q_0 \quad , \quad B = \frac{1}{2}\alpha q_0$$

$$q = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right) q_0 e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \quad , \quad I = \frac{R^2 t q}{4L^2} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)}$$

جـ - بافتراض $R^2 < \frac{4L}{C}$

تكون في هذه الحالة R صغيرة وبذلك يكون كل جذر λ_1 و λ_2 عبارة عن عدد مركب. الجزء الأول حقيقي والجزء الذي تحت الجذر التربيعي عدد تخيلي وبذلك تصبح المعادلة (20) كالتالي:

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$$

حيث $i = \sqrt{-1}$

$$\Rightarrow q = A_1 e^{\frac{-\alpha + i\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}t} + A_2 e^{\frac{-\alpha - i\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}t}$$

أو

$$q = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left[A_1 e^{\frac{i}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2}t} + A_2 e^{-\frac{i}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2}t}\right]$$

$$\Rightarrow q = A e^{-\frac{\alpha}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2}\,t - \phi\right)$$

$$\Rightarrow q = A e^{-\frac{\alpha}{2}t}\cos(\omega t - \phi) \quad (22)$$

حيث:

$$\alpha = \frac{R}{L} \quad , \quad \omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

أما التيار نحسبه بتفاضل المعادلة (22)

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2}\alpha A e^{-\frac{1}{2}\alpha t}\cos(\omega t - \phi) - \omega \sin(\omega t - \phi) A e^{-\frac{1}{2}\alpha t}$$

$$\Rightarrow I = -A e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left[\frac{1}{2}\alpha\cos(\omega t - \phi) + \omega \sin(\omega t - \phi)\right]$$

ويمكن صياغة الثابتين A ، ϕ من الشروط الابتدائية التي فيها يكون $t = 0$

$$q = q_0 \ , \ I = 0 \Longrightarrow q_0 = A\cos\phi \ , \ \frac{1}{2}\alpha\cos\phi + \omega\sin\phi = 0 \quad (23)$$

أو

$$\tan\phi = \frac{\alpha}{2\omega} \quad \text{وعليه فإن:} \quad \cos\phi = \frac{\omega}{r} \ , \ \sin\phi = \frac{\alpha}{2r}$$

حيث: $r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ بالتعويض في (23) نجد أن

$$A = \frac{r q_0}{\omega}$$

بالتعويض في q و I نجد أن:

$$q = q_0 \frac{r}{\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos(\omega t - \phi \quad ; \quad I = -A.r.e^{-\frac{1}{2}\alpha t}.\sin \omega t$$

$$\Longrightarrow I = -q_0 \frac{r^2}{\omega}.e^{-\frac{\alpha}{2}t}.\sin \omega t$$

والإشارة السالبة تدل على أن التيار في اتجاه معاكس لاتجاه التيار أثناء الشحن.

وأخيراً بالتعويض عن α و r و ω نحصل على:

$$q = q_0 \frac{(1/\sqrt{L.C})}{\sqrt{(1/L.C) - (R^2/4L^2)}} e^{(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t)} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\,.t - \phi\right)$$

$$I = \frac{(V/L)}{\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)}} e^{(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t)} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\,t\right)$$

هذه المعادلة معادلة تذبذبية سعتها متناقصة مع الزمن أسياً وكذلك التيار بالنسبة للمعادلة التي تعطي الشحنة. والتردد الطبيعي للدارة يعطى بالعلاقة:

$$F = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

أما إذا كانت المقاومة R صغيرة جداً فإن المعادلة تصبح بالشكل التالي:

$$F_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

حيث F_0: تردد الذبذبات الحرة.

فإذا فرضنا أن q_1 و q_2 هما أعلى قيمتين متتاليتين خلال فترة زمنية قدرها T فإن:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha t}}{e^{-\frac{1}{2}\alpha(t+T)}} = e^{\frac{1}{2}\alpha T} \quad ; \quad \ln\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}\alpha T = \frac{2\pi\left(\frac{R}{2L}\right)}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

ويرمز للمقدار $\ln \frac{q_1}{q_2}$ بالرمز S ويعرف بالتناقص اللوغاريتمي لكل دورة للدارة

فإذا كانت مقاومة الدارة صغيرة فإن:

$$S = \frac{\pi R}{L}\sqrt{LC} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\pi R}{L\omega_0} = \pi\frac{R}{\left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)}$$

أي أن S تساوي X وهو مقدار يمثل النسبة بين المقاومة R والمماثلة الحثية (inductive reactance) أو المقاومة السعوية (capacitive reactance) للدارة في حالة الرنين

والشكل (2) يوضح طبيعة التذبذب الحادث لثلاث قيم لمقاومة الدارة عندما $C = 1\mu F$

$L = 1H$ أما الجهد فيمثل عدداً بسيطاً من الفولت.

ثانياً: الشحن

لدينا:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0$$

حل هذه المعادلة التفاضلية:

$$I = A_1 e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cdot \cos(\omega t - \phi_1)$$

حيث ϕ_1 و A_1 ثوابت يمكن حسابها بالشروط الابتدائية حيث:

عندما يكون $t=0$ يكون $I = 0$ ومنه $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$

$$I = A_1 e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cdot \sin \omega t$$

عندما $t=0$ عندما $t=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V}{L} \Rightarrow \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = A_1\omega = A_1\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}}$$

وبعد إجراء المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$A_1 = \frac{V}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{V}{\sqrt{L/C - R^2/4}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\, t\right)$$

$$q = q_0\left[1 - \frac{(1/\sqrt{LC})}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\, t - \phi\right)\right]$$

فإذا كانت $R^2 = \frac{4L}{C}$ فإن:

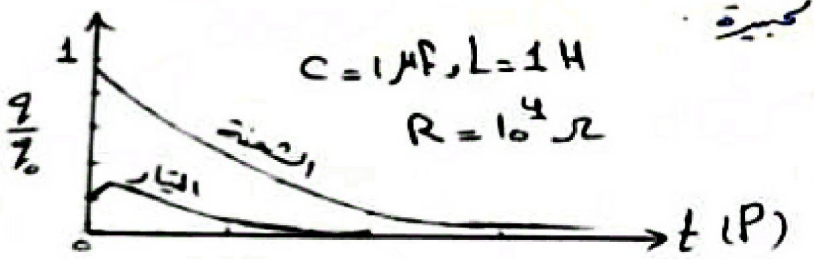
$$I = \frac{V}{L} \cdot t\, e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)}$$

فإذا كانت $R^2 > \frac{4L}{C}$ فإن:

$$I = \frac{V}{\sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{L}{C}}}\, e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cdot \sin h\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}\, t$$

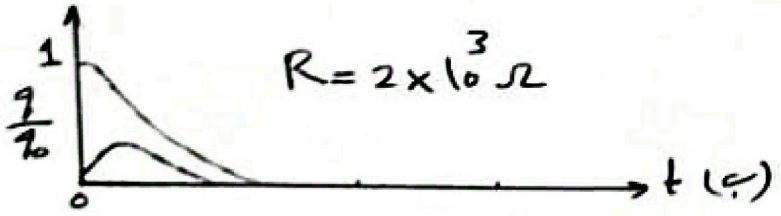
كما يوضح الشكل تغير الشحنة بالنسبة للزمن أثناء شحن المكثف وقد وضعت قيم ثابتة للدارة L و C بحيث يكون الشكل متذبذباً.

ومع الملاحظة أن القيمة العظمى للشحنة، عند لحظة البداية، تكون أكبر كثيراً من قيمة الشحنة اللاحقة على المكثف ولذلك إذا شحن المكثف من مصدر جهد خلال مقاومة صغيرة ومحاثة كبيرة فإن عزل المكثف سيحدث وميضاً وربما حدث ذلك لأنه تم شحن المكثف من خلال مقاومة كبيرة.

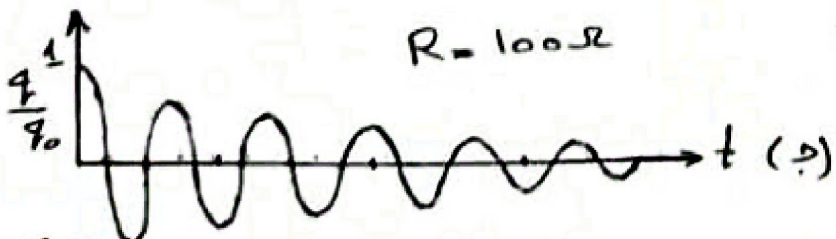


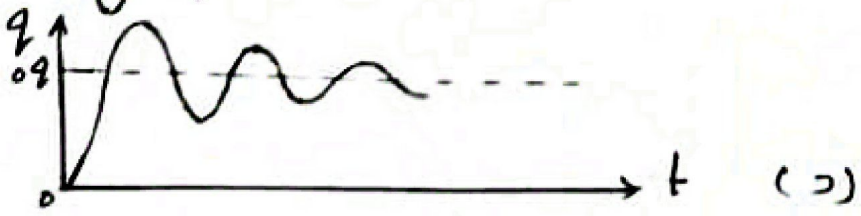
الشكل (ج):

(P)، ب، جـ - تفريغ مكثف سعته 1μF خلال ملف له حث ذاتي قيمته 1H لقيم مختلفة لـ R (100Ω و $2\times10^3\,\Omega$ و $10^4\,\Omega$)



د - تغير الشحنة q على المكثف أثناء عملية الشحن، خلال ملف L بحيث إن قيم R، L، C، تجعل العلاقة متذبذبة مع الزمن





مكتبة A to Z