كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك تحليلي

المحاضرة : الثانية /نظري/د.علي أسد

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

مقرر: الميكانيك التحليلي
الفصل الثاني: معادلات الحركة
د. علي أسد

معادلات الحركة

- المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية: تجري حركة مجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هولونومية بحيث يكون مجموع الاعمال الافتراضية لكافة القوى المؤثرة عليها (القوى الفعالة وقوى العطالة) يساوي الصفر، تسمى المعادلة التي تعبر عن هذا المبدأ بمعادلة دالمبير – لاغرانج وتعطى وفق الصيغة الآتية:

$$\sum[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i] = 0 \qquad (1)$$

حيث: X_i و Y_i و Z_i مركبات محصلة القوى الفعالة.

<u>مفهوم الاحداثيات المعممة، السرع المعممة:</u>

- نفرض لدينا معادلات حركة مجموعة مادية مؤلفة من N نقطة تخضع لـ k ارتباطاً مقيداً.
- نختار عدداً n من الاحداثيات الجديدة نرمز لها بالرمز q_j حيث $(j = 1,2, \dots, 3N - k)$.
- تسمى هذه الاحداثيات التي عددها $n = 3N - k$ (بعدد درجات الحرية للمجموعة المادية) بالاحداثيات المعممة ويتم اختيارها بحيث تحقق شرطين أساسيين:

1. أن يعبر عن الاحداثيات القديمة بدلالة الإحداثيات الجديدة بتوابع مستمرة ووحيدة التعيين وقابلة للاشتقاق بقدر مانريد ويمكن أن تحوي الزمن بشكل صريح.
2. أن تحقق معادلات الارتباط تطابقاً.

- تسمى مشتقات الاحداثيات المعممة بالنسبة للزمن، أي $\dot{q}_j$ بالسرع المعممة.

<u>سؤال:</u> عندما تتحرك نقطة على كرة نصف قطرها a فإن معادلة الارتباط هي:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0}$$

1. **ماهو عدد درجات الحرية؟**
2. **استنتج معادلة الارتباط بتابعية الاحداثيين المعممين q_1 و q_2 في الاحداثيات الديكارتية**
3. **استنتج معادلة الارتباط بتابعية الاحداثيين المعممين q_1 و q_2 في الاحداثيات الاسطوانية**

<u>الحل:</u>

1. عدد درجات الحرية: 3-1=2
2. نختار الاحداثيين المعممين التاليين: $q_1 = x$ و $q_2 = y$ ونحسب z من معادلة الكرة حيث نجد:

$$z = \sqrt{a^2 - {q_1}^2 - {q_2}^2}$$

جميع هذه التوابع مستمرة ووحيدة التعيين، نعوض في معادلة الارتباط:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \implies {q_1}^2 + {q_2}^2 + a^2 - {q_1}^2 - {q_2}^2 - a^2 = 0$$

نلاحظ أن طرفي المعادلة يساوي الصفر وبالتالي تحقق معادلة الارتباط تطابقاً.

3. نختار الاحداثيين المعممين التاليين: $q_1 = \theta$ و $q_2 = \varphi$ وبالتالي:

$$x = a\ sin\theta\ cos\varphi = \ a\ sinq_1\ cosq_2$$

$$y = a\ sin\theta\ sin\varphi = \ a\ sinq_1\ sinq_2$$

$$y = a\ cos\theta\ = \ a\ cosq_1$$

جميع هذه التوابع مستمرة ووحيدة التعيين وقابلة للاشتقاق دوماً، نعوض في معادلة الارتباط:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \implies a^2\ sin^2q_1\ cos^2q_2 + a^2\ \ sin^2q_1\ \ sin^2q_2 + a^2\ cos^2q_1 = 0$$

نلاحظ أن طرفي المعادلة يساوي الصفر وبالتالي تحقق معادلة الارتباط تطابقاً.

<u>الطاقة الحركية – الاندفاعات المعممة:</u>

ذكرنا سابقاً أن مشتق الإحداثيات المعممة بالنسبة للزمن تسمى السرع المعممة، تكتب الطاقة الحركية للجملة بالشكل:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i [\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2] \qquad (2)$$

يعطى الاندفاع في الاحداثيات الديكارتية بالعلاقة:

$$p = mv = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = \frac{dT}{dv} \qquad (3)$$

أي أن الاندفاع هو مشتق الطاقة الحركية بالنسبة للسرعة، وتكافئ هذه العلاقة العلاقات الثلاث الآتية:

$$\left.\begin{aligned} p_x = m\dot{x} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{1}{2} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)\right] = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \\ p_y = m\dot{y} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left[\frac{1}{2} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)\right] = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \\ p_z = m\dot{z} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left[\frac{1}{2} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)\right] = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

وبالتالي نعرف الاندفاعات المعممة بأنها مشتقات الطاقة الحركية بالنسبة للسرع المعممة أي:

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad j = (1,2,3, \dots, n) \qquad (5)$$

باستعمال العلاقة (2) نجد:

$$p_j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_J}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2\right] = \sum_{i=1}^{N}\vec{\dot{r}_i}m_i\frac{\partial\vec{\dot{r}_i}}{\partial\dot{q}_J} \qquad (6)$$

القوى المعممة:

رأينا أن العمل الذي تقوم به القوى $\vec{F_i}$ المطبقة على الجسم أثناء انتقالات عنصرية $d\vec{r_i}$ هو:

$$dW = \sum_i \vec{F_i}\, d\vec{r_i} \qquad (7)$$

ويكتب هذا العمل بدلالة الاحداثيات المعممة بالشكل:

$$dW = \sum_i \vec{F_i}\sum_j \frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}dq_j$$

$$= \sum_j\left[\sum_i \vec{F_i}\,\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}\right]dq_j \qquad (8)$$

من جهه ثانية يمكن كتابة التفاضل الكلي للعمل بالشكل:

$$dW = \sum_j \frac{\partial W}{\partial q_j}dq_j \qquad (9)$$

بمقارنة العلاقتين (8) و (9) نجد:

$$\frac{\partial W}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F_i}\,\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j} \qquad (10)$$

يمكن كتابة العلاقة (7) بالشكل:

$$dW = \sum_i \mathrm{F}_{x_i}dx_i + \mathrm{F}_{y_i}dy_i + \mathrm{F}_{z_i}dz_i \qquad (11)$$

ومنها:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{F}_{x_i} &= \frac{dW}{dx_i}\\ \mathrm{F}_{y_i} &= \frac{dW}{dy_i}\\ \mathrm{F}_{z_i} &= \frac{dW}{dz_i}\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

هذا يعني أن القوة المرفقة بإحدى الاحداثيات هي مشتق العمل بالنسبة لتلك الإحداثية، وبالتالي فإن القوى المعممة هي مشتقات العمل بالنسبة للإحداثيات المعممة، وتعطى هذه القوى بالعلاقة:

$$Q_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F_i} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} = \sum_i \mathrm{m}\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \qquad (13)$$

ملاحظات على الاشتقاق:

1) إمكانية حذف النقاط (التي تمثل المشتق الزمني) من البسط والمقام

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \qquad (14)$$

2) إذا كان التابع قابل للاشتقاق من المرتبة الثانية (وجميع مشتقاته من المرتبة الثانية مستمرة) فإنه من الممكن تبادل ترتيب المشتقات الجزئية:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_j}\vec{r_i} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \qquad (15)$$

معادلات لاغرانج من النوع الثاني:

وجدنا أن الطاقة الحركية تعطى بالعلاقة:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$$

وبالتالي مشتقات الطاقة الحركية بالنسبة للإحداثيات المعممة هي:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \qquad (16)$$

ومشتقاتها بالنسبة للسرع المعممة هي:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \qquad (17)$$

حيث استخدمنا خاصية الاشتقاق المعبر عنها في العلاقة (14)، لنشتق الآن طرفي العلاقة الأخيرة اشتقاقاً تاماً بالنسبة للزمن:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} + \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}$$

$$= \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} + \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \qquad (18)$$

حيث استخدمنا خاصية الاشتقاق المعبر عنها بالعلاقة (15)، باستخدام العلاقتين (13) و (16) في العلاقة (18) نجد:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1,2,3,\dots,n \qquad (19)$$

وهي الشكل العام لمعادلات لاغرانج من النوع الثاني بدلالة الطاقة الحركية.

<u>سؤال:</u> اكتب معادلات لاغرانج من النوع الثاني، مع توضيح كل حد من حدودها، عن ماذا تعبر هذه المعادلات وما هي فائدتها؟

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

الحد الأول هو مشتق الطاقة الحركية الكلية بالنسبة للسرع المعممة. أما الحد الثاني فهو مشتق هذه الطاقة بالنسبة للإحداثيات المعممة.

$$Q_j = \sum_i (m_i \vec{\ddot{r}_i} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}) \qquad j = 1,2,\dots,n$$

تسمى القوى المعممة.

معادلات لاغرانج هي n معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية كافية لحساب n مجهولاً من q_j بدلالة الزمن وبالتالي إيجاد قوانين الحركة.

<u>سؤال:</u> بفرض مجموعة من النقاط المادية تخضع لقوى كمونية وانطلاقاً من العلاقة:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

استخرج معادلات لاغرانج من النوع الثاني.

بفرض أن القوى المؤثرة على المجموعة قوى كمونية فيكون لدينا:

$$\vec{F}_i = -\overrightarrow{grad}_i V$$

وتعطى القوى المعممة حسب التعريف بالعلاقة:

$$Q_j = \sum_i (\vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) = -\sum_i \overrightarrow{grad}_i V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}.\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i}.\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i}.\frac{\partial z_i}{\partial q_j}$$

$$\Longrightarrow Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

نعلم أن تابع الكمون V يعتمد على وضع النقطة المادية أي على إحداثياتها المعممة q_j ولا يعتمد على السرع المعممة $\dot{q}_j$ وبالتالي يكون:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

وبالتالي فإن طرح المقدار من الحد الأول من المعادلة السابقة لا يغير من صحة المعادلة. وهكذا يكون:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

يسمى المقدار $L = T - V$ بتابع لاغرانج وبالتالي تصبح المعادلة السابقة بدلالة تابع لاغرانج بالشكل التالي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad ; j = 1,2,\dots,n$$

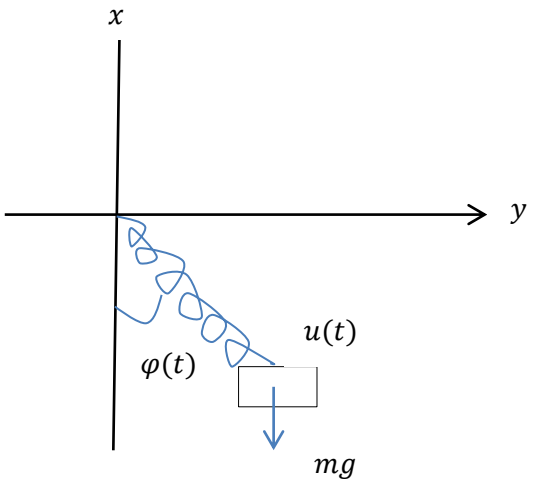
تسمى هذه المعادلات بمعادلات لاغرانج من النوع الثاني من أجل المجموعات المحافظة وتستخدم بشكل واسع لدراسة الاهتزازات الحرة وإيجاد التردد والدور لهذه الحركة. اما في الحالة العامة عندما تخضع المجموعة لقوى غير محافظة فإنها تصبح بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \acute{Q}_j$$

$\acute{Q}_j$: القوى المعممة غير المشتقة من كمون وهي تنتج عن ردود أفعال أو توترات الخيط أو قوى احتكاك أو قوى مقاومة الوسط.

<u>مسألة:</u> نواس مكون من كتلة m معلق بنابض من الطرف الأول مهمل الكتلة في حين ثبت الطرف الثاني بنقطة ثابتة o تعتبر مركز الإحداثيات بفرض أن الحركة تتم في المستوي oxy كما هو مبين بالشكل:

ليكن $u(t)$ موقع الكتلة بالنسبة لنقطة التثبيت o، $\varphi(t)$ الزاوية التي يصنعها مع المحور y أوجد معادلات الحركة باستخدام تابع لاغرانج



الحل:

لدينا معادلات لاغرانج

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad ; j = 1,2$$

$$\left.\begin{matrix} q_1 = x \\ q_2 = y \end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix} q_1 = u(t) \\ q_2 = \varphi(t) \end{matrix}\right\}$$

حركة النواس النابض اهتزازية جيبية

$$u(t) = u(t_0)\, sin\varphi(t)$$

$$x = u(t) sin\varphi(t)$$

$$y = -u(t) cos\varphi(t)$$

$$\acute{x} = \acute{u}(t) sin\varphi(t) + u(t)\acute{\varphi}(t) cos\varphi(t)$$

$$\acute{y} = -\acute{u}(t) cos\varphi(t) + u(t)\acute{\varphi}(t) sin\varphi(t)$$

$$T = \frac{1}{2} m(\acute{x}^2 + \acute{y}^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m(\acute{u}^2 + u^2\acute{\varphi}^2)$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$= -mgy + \frac{1}{2} k(u - u_0)^2$$

$$V = mgu\cos\varphi + \frac{1}{2}k(u-u_0)^2$$

$$\Longrightarrow L = \frac{1}{2}m(\acute{u}^2 + u^2\acute{\varphi}^2) - mgu\cos\varphi - \frac{1}{2}k(u-u_0)^2$$

معادلات الحركة:

$$q_1 = u$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \acute{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

$$q_2 = \varphi$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \acute{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \acute{u}} = \frac{1}{2}m\ 2(\acute{u}) = m\acute{u}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{1}{2}m\ 2u\acute{\varphi}^2 - mg\cos\varphi - \frac{1}{2}k2(u-u_0)$$

$$m\acute{\acute{u}} - m\ u\acute{\varphi}^2 + mg\cos\varphi + k(u-u_0) = 0$$

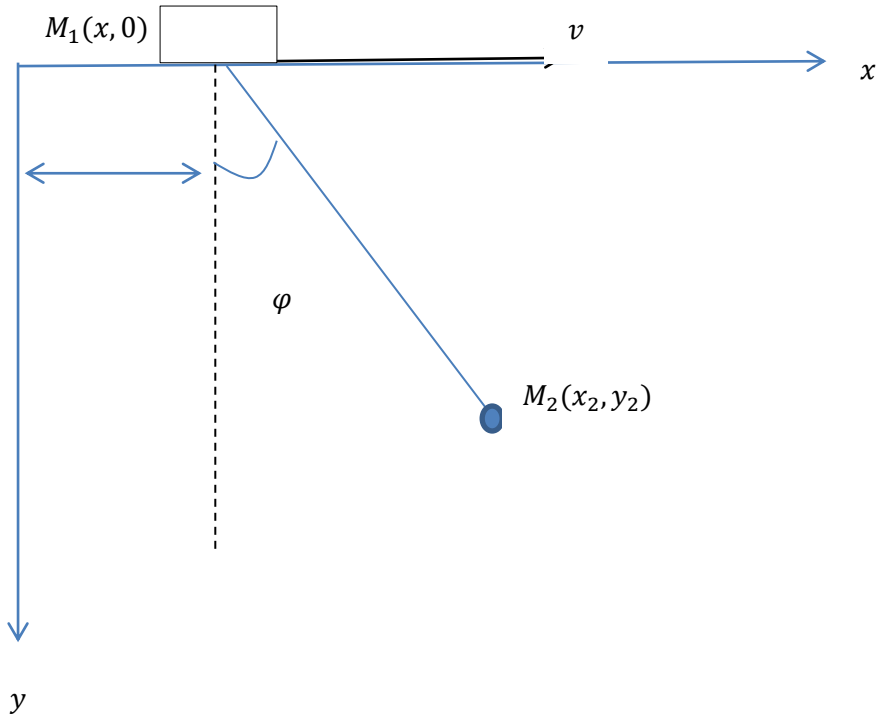
$$\frac{\partial L}{\partial \acute{\varphi}} = \frac{1}{2}mu^2 2\acute{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgu\sin\varphi$$

$$2mu\acute{u}\acute{\varphi} + mu^2\acute{\acute{\varphi}} + mgu\sin\varphi = 0$$

مسألة: نواس مستو كتلته m_2 ونقطة تعليقه ذات كتلة m_1 تحرك بحركة ما المحور الأفقي ox.

1. **احسب تابع لاغرانج للجملة.**
2. **اكتب معادلات لاغرانج لهذه الجملة واحسب دور الاهتزازات الصغيرة لها.**



الحل:

1. نلاحظ أولاً أن للجملة وسيطين مستقلين نختارهما كما يلي:

X: فاصلة النقطة M_1 على المحور ox.

φ : الزاوية التي يصنعها M_1, M_2 مع الشاقول.

لحساب تابع لاغرانج نحسب كلاً من الطاقة الحركية وتابع الكمون ولابد أولاً من حساب سرعة M_2 ولهذا نحسب إحداثياتها فنجد:

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 = x + l\sin\varphi \quad &\Longrightarrow \dot{x}_2 = \dot{x} + l\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ y_2 = l\cos\varphi \quad &\Longrightarrow \dot{y}_2 = -l\sin\varphi\,\dot{\varphi} \end{aligned}\right\}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\left({\dot{x}_2}^2 + {\dot{y}_2}^2\right) = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2$$

$$V = -m_2 g y_2 = -m_2 g l\cos\varphi$$

ويكون تابع لاغرانج:

$$L = T_1 + T_2 - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2 g l\cos\varphi$$

2. للحصول على معادلات لاغرانج يجب الاشتقاق بالنسبة للسرع المعممة $\dot{\varphi}$ و $\dot{x}$ والاحداثيات المعممة φ و x حيث نجد:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}\cos\varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 lg\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi] = 0 \implies (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt}[m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}\cos\varphi] + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2 lg\sin\varphi = 0$$

طريقة الحصول على دور الاهتزازات الصغيرة، نحسب $\dot{x}$ من الأولى فنجد:

$$\dot{x} = -\frac{m_2 l\dot{\varphi}}{m_1 + m_2}\cos\varphi$$

نعوض في المعادلة الثانية ونختصر على $m_2 l^2$، فنحصل على المعادلة:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi} - \frac{m_2\dot{\varphi}\cos^2\varphi}{m_1 + m_2}\right) + \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{m_2\dot{\varphi}^2}{m_1 + m_2}\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

وبإجراء الاشتقاق نجد:

$$\left(1 - \frac{m_2\cos^2\varphi}{m_1 + m_2}\right)\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

عندما تكون الاهتزازات صغيرة: $\sin\varphi \to \varphi, \cos\varphi \to 1,\ \dot{\varphi}^2 \to 0$

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \implies \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

حيث: $\omega = \frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l}$

وهي معادلة حركة توافقية اهتزازية دورها:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l}{(m_1 + m_2)g}}$$

<u>سؤال:</u> أوجد معادلات نيوتن لنقطة مادية طليقة انطلاقاً من تابع لاغرانج.

بما أن النقطة طليقة فإن عدد الاحداثيات المعممة ثلاثة وهي: $q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z$ ويكون:

الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

ثم نحسب العمل الافتراضي: $\delta A = \vec{F}.\delta\vec{r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z$

نحسب المشتقات:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

نشكل معادلات لاغرانج من النوع:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

فنجد:

$$m\ddot{x} = F_x\,, \qquad m\ddot{y} = F_y\,, \;\; m\ddot{z} = F_z \implies m\vec{W} = \vec{F}$$

وهي معادلة نيوتن لنقطة مادية طليقة.

أما إذا استخدمنا المعادلات:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

فإننا نجد:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x,y,z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y\,, \;\; \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z$$

بالتعويض في معادلات لاغرانج نحصل على معادلة نيوتن السابقة.

<u>سؤال:</u> أوجد قانون حركة جسيم إذا أعطي تابع لاغرانج له بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{L = (x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_1^2 x^2 + \omega_0^2 y^2}{2}}$$

باستخدام جملة معادلات لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad ; j = 1,2 \implies q_1 = x, q_2 = y$$

بالنسبة للإحداثي x :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\omega_1^2 x \quad , \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$$

بالتعويض في المعادلات نجد:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0$$

بالنسبة للإحداثي y :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\omega_0^2 y \, , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \dot{y}$$

نعوض فنجد:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

<u>سؤال:</u> يتحرك جسيم في الكمون $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$. والمطلوب:

1. **أوجد قانون الحركة بالطريقة العامة.**
2. **استخدم تابع لاغرانج لإيجاد قانون الحركة.**

<u>الحل:</u>

1. قوة مشتقة من كمون:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -m\omega^2 x = m\ddot{x} \implies \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

2. تابع لاغرانج:

$$L = T - V(x) \implies$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

معادلات لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad ; j = 1 \implies q_1 = x$$

ومنه:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x \quad , \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

نعوض في معادلة لاغرانج:

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0 \quad \Longrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$