



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : الرابعة / نظري / د. علي أسد

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مقرر: التوابع الخاصة

المحاضرة: الرابعة

د. علي أسد



جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الفيزياء

ظهرت معادلة ليجنر التفاضلية (1752-1833) في أبحاثه المتعلقة بدراسة الجاذبية ونظرية الجهد، ولهذه المعادلة والتوابع المرتبطة بها تطبيقات عديدة في ميكانيك الموائع وميكانيك الكم وغيرها من العلوم الفيزيائية والهندسية.

❖ معادلة ليجنر وحلها:

تعطى معادلة ليجنر التفاضلية بالصيغة الآتية:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + ky = 0 \quad (1)$$

حيث $k = l(l + 1)$ مقدار ثابت، فتكتب المعادلة بالشكل:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l + 1)y = 0 \quad (2)$$

الصورة القياسية لمعادلة ليجنر:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + q(x) \frac{dy}{dx} + r(x)y = 0 \quad (3)$$

حيث:

$$q(x) = \frac{-2x^3}{1 - x^2}, \quad r(x) = \frac{l(l + 1)x^2}{1 - x^2}$$

يمكن تمثيل كل من $q(x)$ و $r(x)$ على شكل كثيرات حدود مرتبطة بالشرط $|x| < 1$ وبالتالي فإن شرط تحقيق معادلة ليجنر هو $-1 < x < 1$

يعطى حل معادلة ليجنر من أجل جميع القيم $x \in [-x, x]$ بالشكل الآتي:

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{(2l - 2r)! x^{l-2r}}{2^l r! (l - r)! (l - 2r)!} \quad (4)$$

❖ مبرهنة (1): إذا كان $|t| < 1$ و $|x| \leq 1$ فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (5)$$

البرهان: ننشر المقام وفق نظرية ثنائي الحد لنيوتن كما يلي:

$$\frac{1}{(1+y)^m} = 1 - my + \frac{m(m+1)}{2!}y^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}y^3 + \dots$$

حيث: $m = \frac{1}{2}$ و $y = t^2 - 2xt$ نجد بالتعويض:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} &= 1 - \frac{1}{2}(t^2 - 2xt) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{2!}(t^2 - 2xt)^2 - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{3!}(t^2 - 2xt)^3 \\ &= 1 + xt - \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2!}(t^4 - 4xt^3 + 4x^2t^2) - \frac{135}{3!}(t^6 - 6xt^5 + 12xt^4 - 8x^3t^3) \end{aligned}$$

بتجميع الحدود وفق سلسلة قوى لـ t نجد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} &= 1 + xt + \frac{1}{2}(3x^2 - 1)t^2 + \left(-\frac{3}{2!}4x + \frac{135}{3!}8x^3\right)t^3 + \left(\frac{3}{2!} - \frac{135}{3!}12x\right)t^4 \\ &+ \left(\frac{135}{3!}6x\right)t^5 + \left(-\frac{135}{3!}\right)t^6 \end{aligned}$$

ما داخل الأقواس تمثل كثيرات حدود ليجندر (العلاقة (4)) وبالتالي:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

تسمى العلاقة السابقة بالدالة المولدة لكثيرات حدود ليجندر

❖ **مبرهنة (2):** علاقة رودريج

يمكن التعبير عن تابع ليجندر بالعلاقة التفاضلية الآتية:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (6)$$

البرهان: بما أن

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{r=0}^n (-1)^r C_r^n x^{2(n-r)} \quad (7)$$

بالتفاضل n من المرات نجد:

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r C_r^n x^{2(n-r)} \quad (8)$$

بما أن:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2r} = 0 \quad n < 2r \Rightarrow r > \frac{n}{2}$$

وعليه يتحول $\sum_{r=0}^n$ إلى $\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ، وحيث أن:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = m(m-1) \dots (m-n+1) x^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$$

فإن:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2r} = \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} x^{n-2r} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^r n!}{r! (n-r)!} \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} x^{n-2r} \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r! (n-r)! (n-2r)!} x^{n-2r} = P_n(x) \end{aligned}$$

تطبيق: أوجد ما يلي:

$$P_0, P_1, P_2, P_3$$

الحل: باستخدام العلاقة:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$n = 0$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0}{dx^0} (x^2 - 1)^0 = 1$$

$$n = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x$$

$$n = 2$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} [4x^3 - 4x] = \frac{1}{2} [3x^2 - 1]$$

$$n = 3$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3 \\ &= \frac{1}{48} \frac{d^3}{dx^3} (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{48} \frac{d^2}{dx^2} (6x^5 - 12x^3 + 6x) \\ &= \frac{1}{48} \frac{d}{dx} (30x^4 - 36x^2 + 6) \\ &= \frac{1}{48} (120x^3 - 72x) \\ &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

❖ مبرهنة (3): علاقة التعامد:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (9)$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ 1 & , n = m \end{cases}$$

الإثبات: نستخدم المعادلتين:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (10)$$

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_m(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_m(x)}{dx} + m(m+1)P_m(x) = 0 \quad (11)$$

يمكن كتابة المعادلتين بالشكل:

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_n\} + n(n+1)P_n = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_m\} + m(m+1)P_m = 0 \quad (13)$$

نضرب المعادلة (12) بـ P_m و (13) بـ P_n ونطرح:

$$P_m \frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_n\} - P_n \frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_m\} + \{n(n+1) - m(m+1)\}P_n P_m = 0 \quad (14)$$

وحيث أن:

$$\frac{d}{dx}\{P_m(1-x^2)P'_n\} = P_m \frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_n\} + (1-x^2)P'_m P'_n$$

وبالمثل:

$$\frac{d}{dx}\{P_n(1-x^2)P'_m\} = P_n \frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_m\} + (1-x^2)P'_n P'_m$$

بالطرح:

$$\frac{d}{dx}\{P_m(1-x^2)P'_n\} - \frac{d}{dx}\{P_n(1-x^2)P'_m\} = P_m \frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_n\} - P_n \frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_m\}$$

بالتعويض في المعادلة (14):

$$\frac{d}{dx}\{P_m(1-x^2)P'_n - P_n(1-x^2)P'_m\} = \{m(m+1) - n(n+1)\}P_n P_m = 0$$

بالتكامل بالنسبة لـ x على المجال $[-1,1]$ نجد:

$$\{m(m+1) - n(n+1)\} \int_{-1}^1 P_n P_m dx = \left[(1-x^2)P_m P'_n - (1-x^2)P_n P'_m \right]_{-1}^1$$

$$\int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0 \quad n \neq m$$

ولإثبات الحالة عندما $n = m$ نستخدم العلاقة:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

بتربيع الطرفين:

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \right\}^2$$

أو على الصورة:

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^{n+m} P_n(x)P_m(x) \quad (15)$$

بإجراء التكامل على المتحول x

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)-2tx} dx = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^{n+m} \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx$$

لكن:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)-2tx} dx = \left[\frac{1}{-2t} \ln(1+t^2-2tx) \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2t} [\ln(1+t^2-2t) - \ln(1+t^2+2t)] \\ &= \frac{1}{t} [\ln(1+t) - \ln(1-t)] \quad , \quad 0 < t < 1 \end{aligned}$$

باستخدام منشور $\ln(1+t)$ و $\ln(1-t)$ نحصل على:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{t} \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots \right] = \frac{1}{t} \left[2t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \dots \right] \\ &= 2 \left[1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \dots \right] \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} \end{aligned}$$

نعوض هذه النتيجة في المعادلة (15)

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx$$

بمطابقة أمثال t^{2n} نجد:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

❖ علاقات ليجنر التكرارية: لإيجاد علاقات تكرارية لتابع ليجنر نستخدم الآتي:

$$(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (16)$$

نفاضل هذه العلاقة بالنسبة للمتغير t نجد أن:

$$-\frac{1}{2}(-2x + 2t)(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) \quad (17)$$

نضرب الطرفين بالمقدار $(1 - 2tx + t^2)$:

$$(x - t)(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - 2tx + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x)$$

$$(x - t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1 - 2tx + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) \quad (18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) - 2x \sum_{n=0}^{\infty} nt^n P_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n+1}P_n(x)$$

بمطابقة أمثال t^n نجد:

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

وبالتالي نحصل على العلاقة التكرارية التالية:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (19)$$

بمفاضلة (16) بالنسبة للمتحول x نجد:

$$-\frac{1}{2}(-2t)(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P'_n(x)$$

نضرب الطرفين بـ $(x - t)$

$$t(x - t)(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{3}{2}} = (x - t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n P'_n(x)$$

بالاستفادة من المعادلة (17) نجد:

$$t \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} P_n(x) = (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n P'_n(x)$$

بمطابقة t^n نحصل على المعادلة التفاضلية التكرارية الآتية:

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x) \quad (20)$$

لحذف المتحول x من المعادلة (20) نفاضل المعادلة (19) بالنسبة لـ x :

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n - (2n+1)xP'_n + nP'_{n-1}(x) = 0 \quad (21)$$

من (20) نجد:

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + P'_{n-1}(x)$$

نعوض في (21):

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n - (2n+1)[nP_n(x) + P'_{n-1}(x)] + nP'_{n-1}(x) = 0$$

$$(n+1)[P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)] = (n+1)(2n+1)P_n$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n \quad (22)$$

مثال (1): أوجد ما يلي:

$$P_2, P_3, P_4$$

الحل: نستخدم المعادلة (19):

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n + nP_{n-1}(x) = 0$$

عندما $n = 1$

$$2P_2(x) - 3xP_1 + P_0(x) = 0$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

عندما $n = 2$

$$3P_3(x) - 5xP_2 + 2P_1(x) = 0$$

$$3P_3(x) - \frac{5}{2}x(3x^2 - 1) + 2x = 0$$

$$3P_3(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{5}{2}x - 2x$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

عندما $n = 3$

$$4P_4(x) - 7xP_3(x) + 3P_2(x) = 0$$

$$4P_4(x) - 7x \left[\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right] + 3 \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right] = 0$$

$$P_4(x) = 7x \left[\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right] - 3 \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{35}{8}x^4 - \frac{21}{8}x^2 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{8}[35x^4 - 30x^2 + 3]$$

مثال (2): أثبت صحة العلاقة الآتية:

$$P'_5(x) = 9P_4(x) + 5P_2(x) + P_0(x)$$

الإثبات: نلاحظ أن الطرف الأيسر تفاضل لذلك نستخدم العلاقة:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n$$

عندما $n = 4$

$$P'_5(x) - P'_3(x) = 9P_4$$

عندما $n = 2$

$$P'_3(x) - P'_1(x) = 5P_2$$

بالجمع:

$$P'_5(x) - P'_1(x) = 9P_4 + 5P_2$$

$$P_1(x) = x \Rightarrow P'_1(x) = 1 = P_0$$

$$\Rightarrow P'_5(x) = 9P_4(x) + 5P_2(x) + P_0(x)$$