



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : الثالثة / نظري / د. علي أسد

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960



تحويل لابلاس (Laplace transform):

يعرف تحويل لابلاس للتابع $f(x)$ بأنه

$$\mathcal{A}[f(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx = F(s) \quad (1)$$

حيث s بارامتر

❖ بعض خواص تحويل لابلاس:
(1) الخاصية (1):

$$\mathcal{A}[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] = \lambda_1 \mathcal{A}[f_1(x)] + \lambda_2 \mathcal{A}[f_2(x)]$$

λ_1 و λ_2 ثوابت اختيارية

$$\mathcal{A}[e^{ax} f(x)] = F(s - a) \quad (2) \text{ الخاصية (2) الانسحابية):}$$

$$\mathcal{A}[1] = \frac{1}{s} \text{ فإن } f(x) = 1 \text{ إذا كان } (3) \text{ الخاصية (3):}$$

الاثبات: نجري عملية التكامل مباشرة:

$$\mathcal{A}[1] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{A}[x^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \text{ فإن } f(x) = x^n \text{ إذا كان } (4) \text{ الخاصية (4):}$$

الإثبات: من التعريف:

$$\mathcal{A}[x^n] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx$$

نفرض $sx = y$ وبالتالي: $dx = \frac{1}{s} dy$ $x = \frac{y}{s}$ نعوض في التكامل:

$$\mathcal{A}[x^n] = \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{y^n}{s^n} \frac{1}{s} dy = \frac{1}{s^{n+1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy}_{\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

(5) الخاصية (5): إذا كان $f(x) = e^{ax}$ فإن $\mathcal{A}[e^{ax}] = \frac{1}{s-a}$

الإثبات: من التعريف:

$$\mathcal{A}[e^{ax}] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{ax} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)x} dx = -\frac{1}{(s-a)} e^{-(s-a)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

(6) الخاصية (6): إذا كان $f(x) = \sinh bx$ فإن $\mathcal{A}[\sinh bx] = \frac{b}{s^2-b^2}$

الإثبات: لدينا:

$$\sinh bx = \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\sinh bx] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{bx} - e^{-bx})\right] = \frac{1}{2}(\mathcal{A}[e^{bx}] - \mathcal{A}[e^{-bx}]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b}\right) \\ &= \frac{b}{s^2-b^2} \end{aligned}$$

(7) الخاصية (7): إذا كان $f(x) = \sin bx$ فإن $\mathcal{A}[\sin bx] = \frac{b}{s^2+b^2}$

الإثبات: لدينا:

$$\sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\sin bx] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2i}(e^{ibx} - e^{-ibx})\right] = \frac{1}{2i}(\mathcal{A}[e^{ibx}] - \mathcal{A}[e^{-ibx}]) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ib} - \frac{1}{s+ib}\right) \\ &= \frac{b}{s^2+b^2} \end{aligned}$$

(8) الخاصية (8): إذا كان $f(x) = \cos bx$ فإن $\mathcal{A}[\cos bx] = \frac{s}{s^2+b^2}$

الإثبات: لدينا:

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}$$

وبالتالي:

$$\mathcal{L}[\cos bx] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{ibx} + e^{-ibx})\right] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{ibx}] + \mathcal{L}[e^{-ibx}]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - ib} + \frac{1}{s + ib}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 + b^2}$$

(9) الخاصية (9): إذا كان $f(x) = \cosh bx$ فإن $\mathcal{L}[\cosh bx] = \frac{s}{s^2 - b^2}$

الإثبات: لدينا:

$$\cosh bx = \frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}$$

وبالتالي:

$$\mathcal{L}[\cosh bx] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{bx} + e^{-bx})\right] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{bx}] + \mathcal{L}[e^{-bx}]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - b} + \frac{1}{s + b}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 - b^2}$$

سؤال (1): أوجد تحويل لابلاس للمشتقة الأولى $f'(x)$

الحل: من التعريف:

$$F(s) = \mathcal{L}[f'(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} df(x)$$

نكامل بالتجزئة: $dv = df(x) \Rightarrow v = f(x)$, $u = e^{-sx} \Rightarrow du = -se^{-sx} dx$

وبالتالي:

$$F(s) = \frac{f(x)}{e^{sx}} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

$$= sF(s) - f(0)$$

سؤال (2): أوجد تحويل لابلاس للمشتقة الثانية $f''(x)$

الحل: من التعريف:

$$F(s) = \mathcal{L}[f''(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f''(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} d(f'(x))$$

نكامل بالتجزئة: $dv = d(f'(x)) \Rightarrow v = f'(x)$, $u = e^{-sx} \Rightarrow du = -se^{-sx} dx$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{f'(x)}{e^{sx}} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x) dx \\ &= -f'(0) + s[sF(s) - f(0)] \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

تعميم: تحويل لابلاس للمشتقة من المرتبة n

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = s^n - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

❖ أمثلة:

مثال(1): أوجد تحويل لابلاس لـ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[x^2 - 5x^{\frac{3}{2}} + 7\right] &= \mathcal{L}[x^2] - 5\mathcal{L}\left[x^{\frac{3}{2}}\right] + \mathcal{L}[7] \\ &= \frac{\Gamma(3)}{s^3} - 5 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{7}{s} \end{aligned}$$

باستخدام خواص تابع غاما

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[x^2 - 5x^{\frac{3}{2}} + 7\right] &= \frac{2\Gamma(2)}{s^3} - 5 \frac{3}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{7}{s} \\ &= \frac{2}{s^3} - \frac{15\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{7}{s} \end{aligned}$$

مثال(2): أوجد تحويل لابلاس العكسي لكل مما يلي:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s^2-4}\right) &= \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2-2^2}\right) = \frac{5}{2} \sinh(2x) \quad \bullet \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+5}\right) &= 2 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5}\right) = 2 \cos(\sqrt{5}x) \quad \bullet \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+2s-3}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+1)^2-4}\right) = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{(s+1)^2-2^2}\right) = \frac{3}{2} e^{-x} \sinh 2x \quad \bullet \end{aligned}$$

ملاحظة: استخدمنا تحويل لابلاس للتابع:

$$\mathcal{L}[e^{ax} \sinh bx] = \frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{ax} \cosh bx] = \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{ax} \cos bx] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{ax} \sin bx] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

ملاحظة: هنا استخدمنا الخاصية الانسحابية حيث استبدلنا كل s بـ $s-a$

طريقة ثانية لحل المثال السابق:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{3}{s^2 + 2s - 3} \right)$$

$$\frac{3}{s^2 + 2s - 3} = \frac{3}{(s-1)(s+3)}$$

باستخدام تجزئة الكسور:

$$\frac{3}{(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3}$$

بتوحيد المقامات وحذفها:

$$3 = (A+B)s - A + 3B$$

بالمطابقة بين الطرفين:

$$A + B = 0$$

$$-A + 3B = 3$$

بالحل المشترك نجد:

$$A = -\frac{3}{4}, B = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{(s-1)(s+3)} = -\frac{3}{4} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{s+3}$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s-1)(s+3)} \right] = -\frac{3}{4} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-1} \right) + \frac{3}{4} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+3} \right)$$

$$= -\frac{3}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{-3x}$$

ملاحظة النتيجتان متطابقتان إذا عوضنا

$$\sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5s+1}{(s+2)(s+3)} \right] \bullet$$

$$\frac{5s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+3)}$$

$$5s+1 = As+3A+Bs+2B$$

$$5s+1 = (A+B)s+3A+2B$$

بمطابقة الأمثال في الطرفين:

$$A+B=5$$

$$3A+2B=1$$

بالحل المشترك نجد:

$$B=14, \quad A=-9$$

$$\frac{5s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{-9}{(s+2)} + \frac{14}{(s+3)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5s+1}{(s+2)(s+3)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-9}{(s+2)} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{14}{(s+3)} \right]$$

$$= -9e^{-2x} + 14e^{-3x}$$

❖ استخدام تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية العادية:

مثال (3): أوجد الحل الوحيد للمعادلة:

$$y'' + y = \sin(2x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة:

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\sin(2x)]$$

باستخدام خصائص تحويل لابلاس:

$$s^2Y - sY(0) - Y'(0) + Y = \frac{2}{s^2 + 4}$$

ومنها:

$$Y = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

نستخدم تجزئة الكسور:

$$\frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)}$$

بتوحيد المقامات وحذفها:

$$s^2 + 6 = As^3 + 4As + Bs^2 + 4B + Cs^3 + Cs + Ds^2 + D$$

بتجميع الحدود المتشابهة ومطابقة الأمثال في الطرفين:

$$A + C = 0$$

$$B + D = 1$$

$$4A + C = 0$$

$$4B + D = 6$$

بالحل المشترك:

$$A = C = 0 \quad B = \frac{5}{3}, \quad D = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{s^2 + 4} \right)$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \right] = \frac{5}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] - \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^2 + 2^2} \right] = y(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{5}{3} \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x$$

مثال(4): باستخدام تحويل لابلاس أوجد الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + 2y' - y = e^x \sin x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

الحل: نأخذ مؤثر لابلاس لطرفي المعادلة فنجد:

$$s^2 Y - sY(0) - Y'(0) + 2[sY - Y(0)] - Y = \frac{1}{(s - 1)^2 + 1}$$

$$(s^2 + 2s - 1)Y = \frac{1}{(s - 1)^2 + 1} + 1$$

$$Y = \frac{s^2 - 2s + 3}{(s^2 + 2s - 1)(s^2 - 2s + 2)}$$

نقوم بتجزئة الكسور:

$$\frac{s^2 - 2s + 3}{(s^2 + 2s - 1)(s^2 - 2s + 2)} = \frac{As + B}{s^2 + 2s - 1} + \frac{Cs + D}{s^2 - 2s + 2}$$

بتوحيد المقامات وحذفها:

$$s^2 - 2s + 3 = As^3 - 2As^2 + 2As + Bs^2 - 2Bs + 2B + Cs^3 + 2Cs^2 - Cs + Ds^2 + 2Ds - D$$

$$s^2 - 2s + 3 = (A + C)s^3 + (-2A + B + 2C + D)s^2 + (2A - 2B - C + 2D)s + (2B - D)$$

بمطابقة الأمثال في الطرفين:

$$A + C = 0 \quad (1)$$

$$-2A + B + 2C + D = 1 \quad (2)$$

$$2A - 2B - C + 2D = -2 \quad (3)$$

$$2B - D = 3 \quad (4)$$

من (1):

$$A = -C \quad (5)$$

من (4):

$$D = 2B - 3 \quad (6)$$

نعوض (5) و (6) في (2)

$$-4A + 3B = 4 \quad (7)$$

نعوض (5) و (6) في (3)

$$3A + 2B = 8 \quad (8)$$

نضرب (7) بـ 3 و (8) بـ (4) ونجمع طرفاً إلى طرف:

$$17B = 44$$

$$B = \frac{44}{17}, \quad A = \frac{16}{17}, \quad C = -\frac{16}{17}, \quad D = \frac{37}{17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{s^2 - 2s + 3}{(s^2 + 2s - 1)(s^2 - 2s + 2)} &= \frac{1}{17} \left(\frac{16s + 44}{s^2 + 2s - 1} \right) + \frac{1}{17} \left(\frac{-16s + 37}{s^2 - 2s + 2} \right) \\
&= \frac{1}{17} \left[\frac{16(s + 1) + 28}{(s + 1)^2 - 2} + \frac{-16(s - 1) + 21}{(s - 1)^2 + 1} \right] \\
&= \frac{1}{17} \left[16 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 - 2} + \frac{28}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s + 1)^2 - 2} - 16 \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1} + 21 \frac{1}{(s - 1)^2 + 1} \right]
\end{aligned}$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$y(x) = \frac{1}{17} [16e^{-x} \cosh \sqrt{2}x + 14\sqrt{2}e^{-x} \sinh \sqrt{2}x - 16e^x \cos x + 21e^x \sin x]$$