



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

١

المادة : اهتزازات وامواج

المحاضر : الثالثة/نظري/دكتورة

{{{ A to Z مكتبة }}}}

Maktabat A to Z Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960





التالي

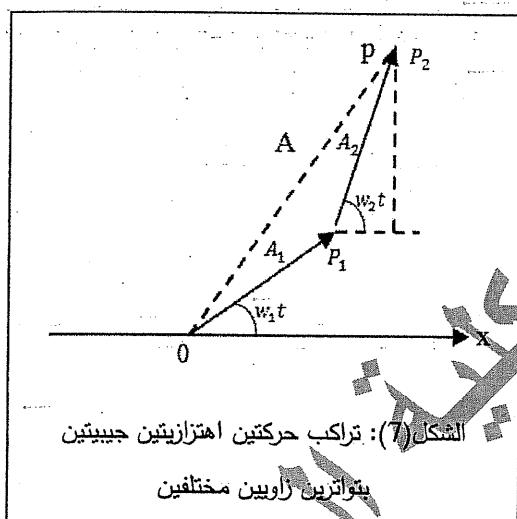
المحاضرة لمقرر الاهتزازات والأمواج لطلاب السنة الثانية كيمياء - د. سمر عمران

الحركات الاهتزازية

5-2: تركيب حركتين اهتزازيتين جيبيتين بسيطتين لهما المنحى نفسه وتواتر زاويتين مختلفتين:

تعتبر الحالة التي يكون فيها للحركتين الجيبيتين المنحى نفسه ولكن بتواترين زاويتين مختلفتين من الحالات الهامة. ولكن لتسهيل الدراسة نأخذ الحالة التي يكون فيها $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ، عندئذ تُوصف الحركة بالمعادلتين:

$$x_1 = A_1 \cos(w_1 t), \quad x_2 = A_2 \cos(w_2 t) \quad (24)$$



إن الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{OP_1}$ و $\overrightarrow{OP_2}$ في الشكل (7)

تساوي الفرق $t(w_1 - w_2)$ حيث

$w_1 > w_2$ ليست ثابتة، وعليه فإن قياس المتجه

المحصل \overrightarrow{OP} ليس ثابتاً، كما أنه لا يدور بسرعة زاوية

ثابتة، وبالتالي فإن الحركة المحصلة

ليست جيبية إلا أن سعة الحركة المحصلة كما يبدو في

الشكل (7) تساوي:

عندما $A = A_1 + A_2$ ، وتغير A بين القيمتين ($A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(w_1 - w_2)t}$)

عندما $(w_1 - w_2)t = (2n + 1)\pi$ ، $A = |A_1 - A_2|$ ، و $(w_1 - w_2)t = 2n\pi$

وتواتر اهتزازها بالعلاقة:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{w_1 - w_2} \Rightarrow \frac{w_1 - w_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2 \quad (25)$$

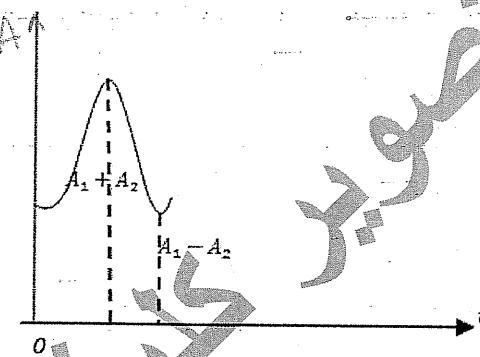
نلاحظ من المعادلة الأخيرة أن تواتر الاهتزاز الناتج يساوي الفرق بين التواترين للحركتين المترافقتين.

يبين الشكل (8) تغير السعة A بدلالة الزمن، وتتشاء هنا الحالة المواتقة لرنانتين تهتزان في الوقت نفسه بتوافر زاويين متقاربين ومختلفين في موضعين متجاورين. فنلاحظ عددياً تراجعاً في الشدة يسمى الخفقات الذي يُعزى إلى تغير السعة كما هو مبين في الشكل (9). وعندما تتساوى السعتان $A_1 = A_2$ نحصل على العلاقة الآتية:

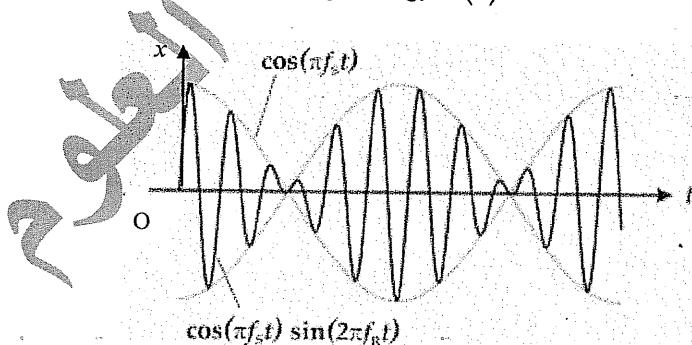
$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1(\cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)) \\ &= 2A_1 \cos\left[\frac{w_1+w_2}{2}\right] t \cdot \cos\left[\frac{w_1-w_2}{2}\right] t = A \cos\left[\frac{w_1-w_2}{2}\right] t \end{aligned} \quad (26)$$

تبين المعادلة (26) أنَّ للحركة المحصلة لاهتزاز السعة توافر زاوي $w = \frac{w_1+w_2}{2}$ يدعى التواتر الزاوي الوسطي وسعة مكيفة بتواتر تكيف $\frac{w_1-w_2}{2}$ تساوي إلى:

$$A = 2A_1 \cos\left[\frac{w_1-w_2}{2}\right] t \quad (27)$$



الشكل(8): تغير السعة والخفقات.



الشكل(9): تكيف السعة وظاهرة الخفقات.

ويكن أن نحصل على هذه النتيجة مباشرة من المعادلة

يبين الشكل (9) تغير $x(t)$ بدلالة الزمن t حيث يشير فيه المنحنى المتقطع إلى تكيف السعة، ونشير أيضاً إلى أننا نحصل على ظاهرة الخفقات عندما نركب موجتين لهما ترددان مختلفان تتشابهان في الاتجاه نفسه ولهمما الطور نفسه ونحصل في هذه الحالة على تغيرات متباينة في السعة (الشدة) ونقول أن هناك تكيفاً، ولهذا الموضوع أهمية كبيرة في الإرسال الراديوي والتلفزيوني. تجدر الإشارة هنا إلى الحالة التي تنتشر فيها موجتان أحدهما واردة والأخرى معكسة، فيمكن البرهان أننا نحصل منها على موجة محصلة لها نفس التواتر الزاوي ولكن بسعة متغيرة، وبشكل عليها عقد ويطون وهذا ما يسمى الأمواج المستقرة، وكلما ازداد عدد العقد ازداد الاهتزاز وتقوست الموجة، وزادت طاقتها، وهذا ما نجده عند دراسة تشكل الأمواج في الأوتار أو المجاوبة اللززية.

2- الحركة الاهتزازية المتخامدة:

لقد اعتبرنا في دراسة الحركة الاهتزازية الجببية البسيطة في الفقرات السابقة أنَّ الاهتزاز (حرَّ وغير متخدم) وهو الاهتزاز الحاصل من إزاحة الجسم قليلاً عن موضع توازنه ومن ثم تركه يهتز بصورة حرة تحت تأثير قوة الإرجاع الناتجة عن خاصية المرونة فقط، دون أن يعاني أي مقاومة خارجية أو ضياع في الطاقة مما كان شكله، ونتيجة لذلك فإنَّ سعة الحركة الاهتزازية تبقى ثابتة مما يعني أنَّ الاهتزاز يستمر دون توقف مع مرور الزمن، ولكن في الطبيعة لا وجود للاحتزازات المستمرة التي إذا بدأت لا تنتهي، وأنَّ مثل هذا الاهتزاز يمثل حالة مثالية تماماً وأنَّ أي مهتر حقيقي لا بد أن يعاني شيئاً من فقدان في الطاقة بشكل أو آخر ونتيجة لذلك فإنَّ سعة الحركة الاهتزازية تتحتمد تدريجياً وهي تمثل الحالة الأكثر واقعية.

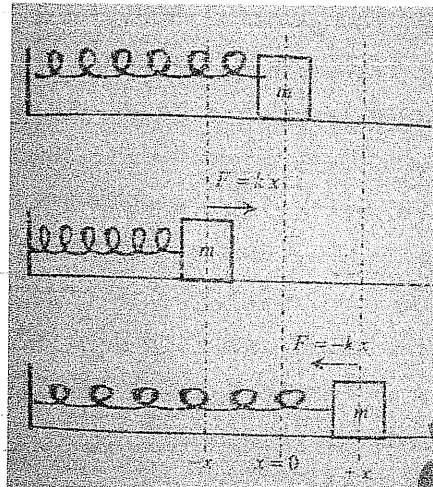
1- معادلة الحركة الاهتزازية المتخامدة في نظام ميكانيكي:

نعتبر جملة ميكانيكية مهترة مكونة من كتلة مربوطة بنابض مثبت إلى جدار الشكل (10)، عندما تُزال الكتلة m إزاحة صغيرة مقدارها x تظهر قوة إرجاع مقدارها $F = -kx$ وعندما تترك الكتلة تتحرك للعودة إلى موضع توازنها خلال حركتها تعاني قوة مقاومة ناتجة عن الاحتكاك أو اللزوجة المائية ومقدارها $-\lambda v = \dot{F}$ ، حيث λ ثابت يدعى بعامل مقاومة الوسط، v السرعة، وإشارة السالب تعني أنَّ القوة تعاكس

اتجاه السرعة النسبية للكتلة المهترئة، وبالتالي القوى المؤثرة على الكتلة m المتحركة في آية لحظة زمنية

تساوي إلى: $ma = -kx - \lambda v$ - وبنطبيق قانون نيوتن الثاني نجد أن:

$$\Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + Kx = 0 \quad (28)$$



الشكل (10): قوى الاحتكاك والمقاومة للحركة الاهتزازية.

بعد تقسيم طرفي المعادلة السابقة على m وافتراض أن $\frac{\lambda}{2m} = \gamma$ ويسمى عامل تخامد الجملة، ولدينا أيضاً

$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ التواتر الزاوي الطبيعي في حال غياب التخامد، تصبح معادلة الحركة بالشكل التالي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0 \quad (29)$$

المعادلة (29) معادلة تفاضلية متتجانسة من الدرجة الثانية، تصف الحركة الاهتزازية الحرّة المتاخمة

لجملة (النابض - نقل)، أو لأي جملة ميكانيكية معرفة بتواترها الزاوي الطبيعي w_0 وعامل تخامدها γ .

نظراً لعدم إمكانية إجراء تكامل مباشر للمعادلة (29)، لذلك يجب البحث عن الحل المناسب بطريقة أخرى،

ومن شكل المعادلة يتبيّن أنَّ الحل المطلوب يجب أن يكون تابعاً يعطي نفس الشكل الرياضي لكل الحدود

فيها والتابع الرياضي الذي تتوفّر فيه هذه الشروط هو التابع الأسّي، لذلك ندخل متّحول جديد y يرتبط

بالمتحول x بعلاقة أسيّة من الشكل:

$$x = y e^{-\gamma t} \quad (30)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} e^{-\gamma t} - \gamma y e^{-\gamma t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} e^{-\gamma t} - \gamma \frac{dy}{dt} e^{-\gamma t} - \gamma^2 y e^{-\gamma t}$$

العنوان في المعايير (29)

بأخذ التفاضل الأول والثاني للمعادلة (30) بالنسبة للزمن \uparrow ثم الاختصار على المقدار $e^{-\gamma t}$ والإصلاح،

نجد:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (w_0^2 - \gamma^2)y = 0 \quad (31)$$

المعادلة (31) هي معادلة تفاضلية متتجانسة من الدرجة الثانية وحلها يتوقف على إشارة المقدار

$$w^2 = (w_0^2 - \gamma^2)$$

1- حالة انعدام التخادم وتتميز بكون المقدار ($\gamma = 0$): تعني هذه الحركة بأن المقاومة التي يعانيها

المهتز خلال حركته معدومة تماماً، وتقابل هذه الحالة الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة التي سبق

ودرسناها. فأخذ المعادلة (31) الشكل التالي: $\frac{d^2y}{dt^2} + w_0^2 y = 0$ حلها من الشكل:

$$T_0 = \left(\frac{2\pi}{w_0}\right) . y = A \cos(w_0 t + \varphi) \quad \text{ويعطى دور الحركة الاهتزازية بالعلاقة:}$$

2- حالة التخادم الضعيف وتتميز بكون المقدار ($w^2 = w_0^2 - \gamma^2 > 0$): تعتبر هذه الحالة

الحالة الأكثر حدوثاً في الطبيعة، والتي من أجلها تأخذ المعادلة (31) الشكل التالي:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + w^2 y = 0 \quad \text{تصف هذه الحالة حركة اهتزازية جيبية بسيطة وحلها من الشكل:}$$

$$T = \left(\frac{2\pi}{w}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2 - \gamma^2}} . y = A \cos(wt + \varphi) \quad \text{ويعطى دور الحركة الاهتزازية بالعلاقة:}$$

نلاحظ من المعادلة الأخيرة أن دور الحركة الاهتزازية لحالة التخادم الضعيف أكبر من الدور الطبيعي

لحالة انعدام التخادم ($T_0 = \left(\frac{2\pi}{w_0}\right)$ الذي يتم تحت تأثير قوى الإرتعاش فقط. بتعويض قيمة المتتحول y في

$$y = A \cos(wt + \varphi) \quad \text{العلاقة (30) نحصل على حل المعادلة (29):}$$

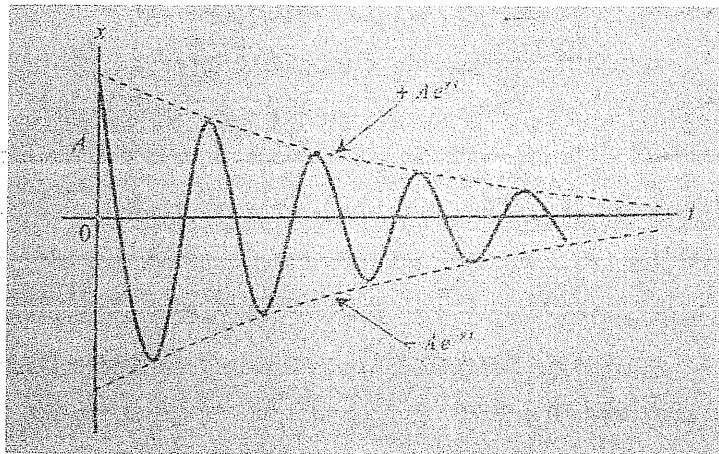
$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(wt + \varphi) \quad (32)$$

تبين هذه الحالة أن التخادم يقود إلى تناقص التواتر الزاوي للاهتزازات، وأن السعة الفعالة للاهتزاز ليست

ثابتة وتساوي: $\pm Ae^{-\gamma t}$ حيث يلاحظ أنها مقدار متغير ويعتمد على عامل التخادم γ والزمن t ، وهذا

يشير إلى أن السعة تتناقص أسيّاً مع الزمن حتى تتعدم عندما تكون قيمة t لا نهائية. يبين الشكل التالي

علاقة الإرتعاشة بالزمن في الحركة الاهتزازية ذات التخادم الضعيف.



الشكل(11): تغير الإزاحة بدلالة الزمن في الحركة المتخامدة.

3- حالة التخادم في وسط لزج (حالة التخادم الكبير جداً)، وتتميز بكون المقدار

$$(w^2 = w_0^2 - \gamma^2 < 0) : \text{يعاني المهتر في هذه الحالة مقاومة شديدة وتكون قيمة عامل}$$

التخادم } \gamma \text{ كبيرة بالمقارنة مع التواتر الزاوي الطبيعي للمهتر } w_0 \text{، وبالتالي يكون للمعادلة (31) حل }

عام من الشكل التالي:

$$y = A_1 e^{wt} + A_2 e^{-wt} \quad (33)$$

حيث: $w = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} > 0$ ، نعرض المعادلة (33) في المعادلة (30) نحصل على الحل العام

بالشكل التالي:

$$x = e^{-\gamma t} [A_1 e^{wt} + A_2 e^{-wt}] \quad (34)$$

حيث: A_1 و A_2 ثابتان حقيقيان يعينان من شروط البدء، ويكون التواتر الزاوي في هذه الحالة w مقداراً تخيلياً (عقدياً) وبالتالي لا توجد اهتزازات، فالجسم الذي أُزيح عن وضع توازنه ثُرَك ليعود إلى وضع وضع توازنه دون أن يجتازه لمرة واحدة، والطاقة التي يفقدها الجسم في الاهتزازات المتخامدة ينتصها الوسط المحيط المقاوم.

4- حالة التخادم الحرج الموافقة للشرط ($w^2 = w_0^2 - \gamma^2 = 0$)

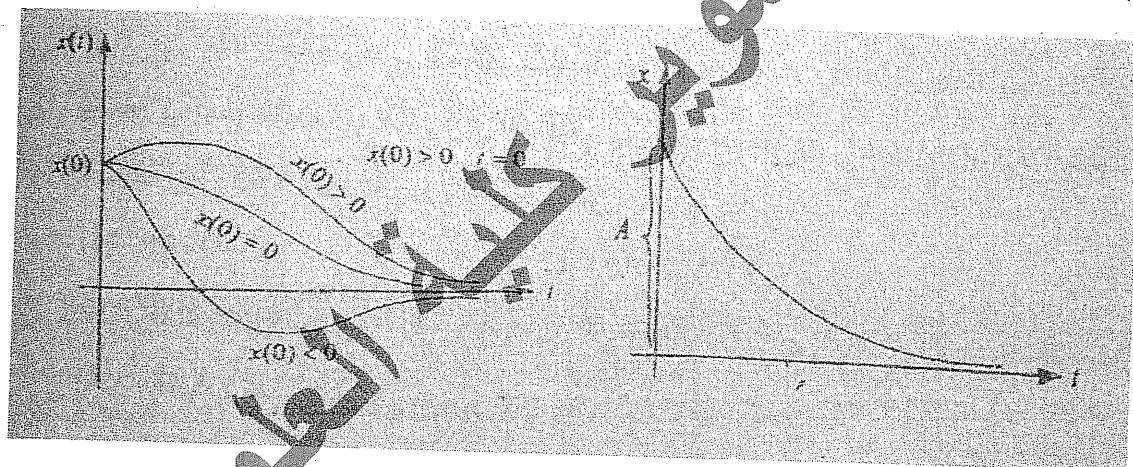
تمثل هذه الحالة الخاصة الحد الفاصل بين سلوكين مختلفين تماماً للمهتر. السلوك الأول: هو سلوك اهتزازي ويببدأ عندما تقل قيمة عامل التخادم γ قليلاً عن قيمة w_0 ، وهذه الحالة تمت دراستها سابقاً في

الحالة الثانية. السلوك الثاني: هو سلوك غير اهتزازي ويحدث عندما تكون قيمة عامل التخادم γ مساوية أو تزيد عن قيمة w_0 ، والحالة $\gamma = w_0$ تؤول المعادلة (31) إلى الشكل التالي: $0 = \frac{d^2y}{dt^2}$ ، وبإجراء تكاملين متتاليين على هذه المعادلة نحصل على حلها الذي يأخذ الشكل: $y = A_1 + A_2 t$ ، حيث A_1 و A_2 ثابتان تكامل حقيقيان يعينان من شروط البدء للحركة وبالتعويض في المعادلة (30) نحصل على:

$$x = e^{-rt}(A_1 + A_2 t) \quad (35)$$

يُلاحظ أنَّ هذا الحل يُمثل الحالة الحرجة، فعندما يزداد عامل التخادم مقترباً من القيمة w_0 ، أي عندما يقترب الزمن الدوري T للاهتزاز المتخادم من اللانهاية $\rightarrow T$ ، إنَّ هذا الحل يصف حركة الجسم في الحالة الحرجة والتي تعني عودة الجسم إلى موضع توازنه بأقل فترة زمنية إذا ما أزيح عن موضع توازنه وترك حرّاً دون أن يصاحب ذلك شكل اهتزازي.

إنَّ الحالة الحرجة أهمية عملية كبيرة في تصميم أجهزة القياس العملية التي تتضمن أجزاء متحركة (المنظومات الميكانيكية) كالذراع أو المؤشرات في أجهزة القياس الكهربائية وغيرها.



الشكل(12): حركة الجسم في الحالة الحرجة.