كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : نظرية الاعداد

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مثال: أوجد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة الديوفانتية التالية:

$1000x + 72y = 32$

الحل:

$a = 1000$

$b = 72$

$c = 32$

نوجد $d = gcd(1000, 72)$ بطريقة إقليدس

$1000 = 13 \times 72 + 64$

$72 = 1 \times 64 + 8$

$64 = 8 \times 8 + 0$

$\Rightarrow d = gcd(a,b) = 8$

* نلاحظ $d \mid c$ بالتالي المعادلة قابلة للحل في $\mathbb{Z}$.
* لنبحث عن حل (x_0, y_0) للمعادلة الديوفانتية:

$d = 8 = 72 - 64$

$= 72 - (1000 - 13 \times 72)$

$8 = 1000(-1) + 72(14)$

نضرب الطرفين بـ 4 نجد:

$32 = 1000(-4) + 72(56)$

$\Rightarrow (x_0, y_0) = (-4, 56)$

حلّ المعادلة المعطاة.

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = -4 + 9t \\ y = 56 - 125t \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

مثال: حل المعادلة

$$16x + 44y = 7$$

قابلة للحلّ في $\mathbb{Z}$ أم لا؟

$$d = gcd(a,b) = gcd(44,16) = 4$$

نلاحظ $d \nmid c$ حيث

$$c = 7$$

* الأعداد الأوليّة (The prime numbers):

- تعريف:

يُقال عن العدد الصحيح $p \neq 0$ أنّه عدد أولي إذا كانت قواسمه الموجبة هي 1 و p فقط.

يُسمّى العدد الصحيح الموجب غير الأولي والأكبر تماماً من العدد 1 عدداً مؤلفاً.

مثال: 2, 3, 5, 7 أعداد أولية

$35 = 5 \times 7$ عدد مؤلف

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة:

$n>1$ عدد مؤلف إذا وفقط إذا وجد $a,b\in\mathbb{Z}$ بحيث

أنّ $n=ab$ حيث

$$1<a\leq b<n$$

بعض خواص الأعداد الأولية:

1- الأعداد الأولية هي أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى.

2- العدد 2 هو العدد الزوجي الأولي الوحيد.

3- إذا كان $p\backslash n$ عندئذٍ

$$gcd(p,n)=p$$

حيث p عدد أولي.

4- إذا كان $p\backslash ab$ حيث p عدد أولي عندئذٍ:

p يقسم أحدهما على الأقلّ.

5- إذا كان p عدد أولي و $p\backslash ab$ و $p\nmid a$

$$\Leftarrow p\backslash b$$

6- إذا كان $p, p_1, p_2, \dots, p_n$

أعداد أولية وكان:

$p\backslash(p_1p_2\dots p_n)$ عندئذٍ p يساوي أحد الأعداد

الأولية p_i.

* النظرية الأساسيّة في الحساب:

كلّ عدد صحيح موجب $n>1$ يمكن أنّ يكتب بشكل وحيد

كجداء منتهٍ لأعداد أوليّة.

$$n=p_1p_2\dots p_k$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث $p_1, p_2, \dots, p_k$ أعداد أولية ليست بالضرورة مختلفة

* كتابة العدد n بالشكل التالي:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

حيث p_i أعداد أولية.

$\forall\ 1 \le i \le r$

و $p_1 < p_2 < \dots < p_r$

ونرمز بـ k_i لتكرار العدد الأولي p_i

مثال: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

نتيجة:

كل عدد صحيح $n > 1$ له عامل أولي p أي:

يوجد عدد أولي p بحيث $p \mid n$

نتيجة:

إذا كان $n > 1$ عدد صحيح مؤلف فله عامل أولي p حيث

$$p \le \sqrt{n}$$

الإثبات:

بما أن n عدد مؤلف:

$$n = ab \quad ; \quad 1 < a \le b < n$$

$$n = ab \ge a \cdot a$$

$$n = ab \ge a^2$$

$$\Rightarrow a \le \sqrt{n}$$

بما أن $a > 1$ فله عامل أولي p أي $p \mid a$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$p \leq a$ $\Leftarrow$

$\Rightarrow p \leq \sqrt{n}$

نتيجة:

إذا كان $n > 1$ ليس له عامل أولي p حيث $p \leq \sqrt{n}$

فإن n عدد أولي

الإثبات:

نفرض جدلاً $n > 1$ عدد ليس أولي فهو عدد مؤلف عندئذٍ

يملك عامل أولي p حيث $p \leq \sqrt{n}$ وهذا مخالف

للفرض إذاً الفرض الجدلي خاطئ

$\Leftarrow$ n عدد أولي.

مثال:

هل العدد 157 أولي أم لا ؟

الحل:

$\sqrt{n} = 12,52$

الأعداد الأولية التي هي أصغر أو تساوي $\sqrt{n}$ هي:

2, 3, 5, 7, 11

$157 = 78 \times 2 + 1 \Rightarrow 2 \nmid 157$

$157 = 52 \times 3 + 1 \Rightarrow 3 \nmid 157$

$157 = 31 \times 5 + 2 \Rightarrow 5 \nmid 157$

$157 = 22 \times 7 + 3 \Rightarrow 7 \nmid 157$

$157 = 14 \times 11 + 3 \Rightarrow 11 \nmid 157$

$\Leftarrow$ 157 عدد أولي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

1. كم هو عدد الأعداد الأولية ؟

سؤال هذه المسألة علماء الرياضيات منذ القدم وقد وضعت براهين كثيرة تثبت أنّه عدد الأعداد الأولية غير منتهي ومن أقدم هذه البراهين وأبسطها البرهان الذي وضعه إقليدس.

مبرهنة :

يوجد عدد غير منتهٍ من الأعداد الأولية (إثبات إقليدس)

الإثبات :

لتكن S مجموعة كلّ الأعداد الأوليّة . نفرض جدلاً أنّ S تحوي عدد منتهٍ من الأعداد الأولية

$$|S| = n \quad , \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

$$p_1 < p_2 < \dots < p_n$$

ولتكن :

$$N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$$

نلاحظ :

$$N > 1 \quad \& \quad N \notin S$$

بما أنّ $N > 1$ فله عامل أولي p حيث $p \mid N$

بالتالي $p \in S$

$$\Rightarrow \exists \ 1 \le i \le n \ ; \ p = p_i$$

$$\left.\begin{array}{l} p \mid N \\ p \mid p_1 p_2 \dots p_n \end{array}\right\} \Rightarrow p \mid (N - (p_1 p_2 \dots p_n))$$

$$\Rightarrow p \mid 1$$

وهذا مرفوض بالتالي الفرض الجدلي خاطئ بالتالي S مجموعة غير منتهية .

TEL:0931497960 - Facebook Group : A to Z مكتبة

2. هل هنالك صيغة تعطي جميع الأعداد الأولية ؟

① الأعداد ذات الصيغة

$N_k = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$; $k \in \mathbb{Z}^+$

حيث

$p_1 = 2$

$p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...

اعتقد إقليدس بأنها تعطي أعداد أولية .

$N_1 = 3$ (أولي)

$N_2 = p_1 p_2 + 1 = 7$ (أولي)

$N_3 = 31$ (أولي)

$N_4 = 211$ (أولي)

$N_5 = 2311$ (أولي)

ولكن لسوء الحظ $N_6 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 + 1$

$\Rightarrow N_6 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1$

$= 59 \times 509$

N_6 ليس عدد أولي .

② وضح فيما (1601 – 1665) الصيغة :

$F_n = 2^{2^n} + 1$

حيث $n \geq 0$

ظنّ أنها تعطي أعداد أوليّة من أجل جميع قيم n

$n = 0, 1, 2, \ldots$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ولكن فيما بعد تبيّن أنّه اعتقاد خاطئ ليس صحيح حيث أثبت أولر (1732) أنّ F_5 عدد مؤلف يقبل القسمة على 641

مبرهنة:

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \quad ; \quad n \geq 0$$

عدد فيرما

1- $F_0 F_1 F_2 \dots F_{m-1} = F_m - 2$

حيث $m \geq 1$

2- $\gcd(F_n, F_m) = 1$

حيث $n \neq m$

(أعداد فيرما أوليّة فيما بينها مثنى مثنى)

إثبات ①:

بالاستقراء الرياضي:

① نثبت صحّة العلاقة من أجل $m = 1$:

$$P_1 = F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$$P_2 = F_1 - 2 = 2^{2^1} + 1 - 2 = 3$$

$$\Rightarrow P_1 = P_2$$

② نفرض صحّة العلاقة من أجل $m = K$:

$$F_0 F_1 \dots F_{K-1} = F_K - 2$$

③ نثبت صحّة العلاقة من أجل $m = K+1$:

أي كيف أثبت:

$$F_0 F_1 \dots F_K = F_{K+1} - 2$$

$$P_1 = (F_0 F_1 \dots F_{K-1}) \times F_K = (F_K - 2) F_K$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= (2^{2^k} - 1)(2^{2^k} + 1) = (2^{2^k})^2 - 1$

$= 2^{2^{k+1}} + 1 - 1 - 1$

$= F_{k+1} - 2 = l_2$

من ① و ② و ③ نجد أن العلاقة صحيحة

- إثبات ②:

باعتبار $n \neq m$ بالتالي أحد العددين وليكن m أكبر من n

ليفرض بأنّ: $(m > n)$

$d = gcd(F_n, F_m)$

$\Rightarrow d \mid F_m$

$\wedge\ d \mid F_n$

$F_0 F_1 F_2 \cdots F_n \cdots F_{m-1} = F_m - 2$

$d \mid F_n \Rightarrow d \mid (F_0 F_1 \cdots F_n \cdots F_{m-1})$

$\wedge\ d \mid F_m \Rightarrow d \mid (F_0 F_1 \cdots F_{m-1} = F_m)$

$\Rightarrow d \mid (-2)$

ولكن d عدد فردي عندئذٍ $\boxed{d = 1}$

$\Rightarrow gcd(F_n, F_m) = 1$

- الخلاصة:

بما أنّ $gcd(F_n, F_m) = 1$

$\forall\ n, m \in \mathbb{N} : n \neq m$

بالتالي يوجد عدد لا نهائي من أعداد فيرما F_k المختلفة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

F_K

أولي أو مثلث عامل أولي

عندئذ يوجد عدد نهائي من الأعداد الأولية المختلفة هي

$P_n \setminus F_n$

النهاية ..

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z