كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية الاعداد

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

خوارزمية إقليدس في إيجاد القاسم المشترك الأعظم للعددين a,b :

نعلم أنّ gcd(a,b)

$= gcd(|a|, |b|)$

لذا نفرض $b \geq a > 0$

نشرع الخوارزمية كما يلي :

$b = q_1 a + r_1$ ; $0 \leq r_1 < a$

فإذا كانت $r_1 = 0$ فإنّ :

$gcd(b,a) = gcd(a, r_1)$

$= gcd(a, 0)$

$= a$

أمّا إذا كانت $r_1 \neq 0$ فنتابع القسمة

$a = q_2 r_1 + r_2$ ; $0 \leq r_2 < r_1$

إذا كانت $r_2 = 0$ عندئذٍ:

$$gcd(a,b) = gcd(a,r_1)$$

$$= gcd(r_1,r_2) = r_1$$

إذا كانت $r_2 \neq 0$ نكتب

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3$$

ونتابع حتى نحصل على باقٍ صفري ونكتب:

$$r_{t-1} = q_{t+1} r_t + 0$$

عندئذٍ يكون:

$$gcd(a,b) = gcd(a,r_1)$$

$$= gcd(r_1,r_2) = \cdots\cdots =$$

$$gcd(r_t, r_{t+1}) = r_t$$

حيث:

$$a > r_1 > r_2 > \cdots > r_t > 0$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي البحث عن القاسم المشترك الأعظم لعددين موجبين نطبق خوارزمية القسمة الإقليدية بشكل متكرر حتى نحصل على باقٍ صفري فيكون الباقي الأخير قبل الباقي الصفري هو القاسم المشترك الأعظم الذي نبحث عنه.

• مثال:

1 أوجد القاسم المشترك الأعظم للعددين

$a = 190$ $b = 72$

الحل:

$190 = 2 \times 72 + 46$

$72 = 1 \times 46 + 26$

$46 = 1 \times 26 + 20$

$26 = 1 \times 20 + 6$

$20 = 3 \times 6 + 2$

$6 = 3 \times 2 + 0$

$gcd(190, 72) = 2$

2 ثم اكتب القاسم المشترك الأعظم كتركيب خطي للعددين a, b

الحل:

$d = 2 = 20 - 3 \times 6$

$= 20 - 3 \times (26 - 20)$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= -3 \times 26 + 4 \times 20$$
$$= -3 \times 26 + 4 \times (46 - 26)$$
$$= 4 \times 46 - 7 \times 26$$
$$= 4 \times 46 - 7 \times (72 - 46)$$
$$= 11 \times 46 - 7 \times 72$$
$$= 11 \times (190 - 2 \times 72) - 7 \times 72$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 2 = 11a + (-29)b}$$

$$2 = xd + yb$$

مثال:

أوجد القاسم المشترك الأعظم للعددين

$d = 12378$ ، $b = 3054$

ثم اكتب القاسم المشترك الأعظم كتركيب خطي للعددين $d, b$

الحل:

$$12378 = 4 \times 3054 + 162 \quad (1)$$
$$3054 = 18 \times 162 + 138$$
$$126 = 1 \times 138 + 24$$
$$138 = 5 \times 24 + 18$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$24 = 1 \times 18 + 6$

$18 = 3 \times 6 + 0$

$d = \gcd(12378, 3054) = 6$

$d = ma + nb \quad ; m, n \in \mathbb{Z}$

$6 = 24 - 18$

$= 24 - (138 - 5 \times 24)$

$= -138 + 6 \times 24$

$= -138 + 6 \times (162 - 138)$

$= -7 \times 138 + 6 \times 162$

$= -7(3054 - 18 \times 162) + 6 \times 162$

$= -7 \times 3054 + 132 \times 162$

$= -7 \times 3054 + 132 \times (12378 - 4 \times 3054)$

$= 132 \times 12378 + (-535) \times 3054$

$= 132a - 535b$

• مثال :

أوجد القاسم المشترك الأعظم للأعداد

$a = 256 \quad , b = 112 \quad , c = 72$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$$gcd(a,b,c) = gcd(a, gcd(b,d))$$

$$= gcd(256, 8) = 8$$

## المضاعف المشترك الأصغر:

تعريف:

ليكن: $d_i$ حيث $(i = \overline{1,n})$ أعداد صحيحة غير معدومة

يُقال إنّ $m$ مضاعف مشترك لهذه الأعداد إذا كان:

$$d_i \mid m \quad \forall i = \overline{1,n}$$

يُقال بأنّ $L$ هو المضاعف المشترك الأصغر للأعداد

$$d_i \; ; \; i = \overline{1,n}$$

إذا تحققت الشروط التالية:

1- $L > 0$

2- $d_i \mid L \quad \forall i = \overline{1,n}$

3- إذا كان $m > 0$ مضاعف مشترك للأعداد $(d_i \mid m)$

فإنّ $L \mid m$

ونكتب عندئذٍ:

$$L = Lcm(d_1, d_2, \dots, d_n)$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهنة:

إذا كان a ، b عددين صحيحين موجبين وكان

$d = gcd(a,b)$

عندئذٍ:

$$Lcm(a,b) = \frac{ab}{gcd(a,b)}$$

مثال: أوجد $Lcm(6,21)$ ؟

الحل: $gcd(6,21) = 3$

$$Lcm(6,21) = \frac{6 \times 21}{3} = 42$$

* تعريف المعادلة الديوفانتية الخطية بـ n متحول:

كل عبارة بالشكل:

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n = b$$

حيث:

$$b, d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{Z}$$

تدعى معادلة ديوفانتية خطية وتسمى:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ متحولات المعادلة

$d_1, d_2, \dots, d_n$ معاملات المعادلة

$b$ المعامل الثابت



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة

تشمل دراسة المعادلة الديوفانتية أمرين:

1- هل يوجد حل للمعادلة الديوفانتية في مجموعة ما ؟

2- إذا كانت المعادلة الديوفانتية المفروضة لها حل في مجموعة فكيف نوجد جميع حلول هذه المعادلة ؟

* دراسة المعادلة الديوفانتية ذات الشكل:

$ax + by = c$

حيث $a, b, c \in \mathbb{Z}$

و $a, b$ ليسا معدومين

(معادلة ديوفانتية خطية بمجهولين) :

1- هل يوجد لها حل في $\mathbb{Z}$ أم $X$ ؟

2- إذا كانت المعادلة قابلة للحل فما هي جميع الحلول الأخرى ؟

- البرهان:

لدينا المعادلة $ax + by = c$ قابلة للحل في $\mathbb{Z}$

ولكن $(x_0, y_0)$ حلاً لها

$$ax_0 + by_0 = c \quad \star$$

لدينا

$$d = gcd(a, b)$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid a \Rightarrow a = q_1 d \; ; \; q_1 \in \mathbb{Z} \\ d \mid b \Rightarrow b = q_2 d \; ; \; q_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نعوض في * نجد:

$$d(q_1 x_0 + q_2 y_0) = c \Rightarrow d \mid c$$

بما أن $d \mid c$ حيث:

$$d = gcd(a, b)$$

$$d \mid c \Rightarrow \boxed{c = qd} \; (1) \; ; \; q \in \mathbb{Z}$$

لدينا:

$$d = gcd(a, b)$$

عندئذٍ يوجد $m, n \in \mathbb{Z}$ بحيث:

$$\boxed{d = ma + nb} \; (2)$$

نعوض (2) في (1) نجد:

$$c = a(mq) + b(nq)$$

$$c = a(x_0) + b\,y_0$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حل المعادلة $ax+by=c$ هو $(x_0,y_0)$ حيث $x_0=mq$ و $y_0=nq$

مبرهنة

إذا كانت المعادلة $ax+by=c$ قابلة للحل في $\mathbb{Z}$ وكان $(x_0,y_0)$ حلاً لهذه المعادلة فإن جميع الحلول الأخرى هي:

$$\begin{cases} x=x_0+\frac{b}{d}t \\ y=y_0-\frac{a}{d}t \end{cases} ; t\in\mathbb{Z}$$

و $d=gcd(a,b)$

الإثبات:

لدينا $(x_0,y_0)$ حل معلوم لـ $ax+by=c$

و $(x,y)$ حل كيفي للمعادلة

$$ax_0+by_0=ax+by$$

$$a(x-x_0)=b(y_0-y) \quad (\star)$$

بما أن

$d=gcd(a,b)$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عندئذٍ يوجد $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$

و $\gcd(a_0, b_0) = 1$

بحيث:

$a = a_0 d$

$b = b_0 d$

نعوض من (*) نجد:

$$a_0 d (x - x_0) = b_0 d (y_0 - y)$$

$$a_0 (x - x_0) = b_0 (y_0 - y) \quad (**)$$

نلاحظ أنّ:

$$a_0 \mid b_0 (y_0 - y)$$

وبما أنّ:

$$\gcd(a_0, b_0) = 1$$

عندئذٍ $a_0 \mid (y_0 - y)$

$$\Rightarrow y_0 - y = a_0 t \quad ; t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y = y_0 - a_0 t$$

$$\Rightarrow y = y_0 - \frac{a}{d} t$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالتعويض في (★★) نجد:

$$a_0(x - x_0) = b_0\, dt$$

$$\Rightarrow x - x_0 = b_0 t$$

$$\Rightarrow \boxed{x = x_0 + \frac{b}{d} t}$$

ملاحظة

المعادلة الديوفانتية $ax + by = c$

إذا كانت قابلة للحل في $\mathbb{Z}$ فهي تملك عدد لانهائي من الحلول

ملاحظة

إذا كانت المعادلة $ax + by = c$

قابلة للحل عندئذٍ لإيجاد حل $(x_0, y_0)$

نقوم بما يلي:

1- نوجد القاسم المشترك الأعظم لـ $a$ و $b$ بطريقة إقليدس

2- نكتب القاسم المشترك الأعظم $d$ لـ $a$ و $b$ بدلالة العددين $a$ و $b$

3- نضرب التركيب الخطي الناتج من الخطوة (2) بالعدد $\left(\frac{c}{d}\right)$

نحصل على تركيب خطي لـ $c$ بدلالة $a$ و $b$

وبالتالي نحصل على $(x_0, y_0)$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

① حل المعادلة الديوفانتية $172x + 20y = 1000$

② وعيّن الحلول الخاصة إن وجدت.

الحل:

① $a = 172$

$b = 20$

$c = 1000$

نوجد $d = gcd(a, b)$ بطريقة إقليدس.

$172 = 8 \times 20 + 12$

$20 = 1 \times 12 + 8$

$12 = 1 \times 8 + 4$

$8 = 2 \times 4 + 0$

$d = gcd(a, b) = 4$

نلاحظ أنّ $d \mid c$

$\Leftarrow$ المعادلة قابلة للحل في $\mathbb{Z}$

② إيجاد $(x_0, y_0)$ حل معيّن لهذه المعادلة:

$d = 4 = 12 - 1 \times 8$

$= 12 - 1 \times (20 - 12)$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= 2 \times 12 - 20$

$= 2 \times (172 - 8 \times 20) - 20$

$d = 4 = 172 \times (2) + 20 \times (-17)$

نضرب الطرفين بـ $\frac{c}{d}$ نجد:

$172(500) + 20(-4250) = 1000$

$(x_0, y_0) = (500, -4250)$

الحلول الأولية هي:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ \text{و} \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = 500 + 5t \\ y = -4250 - 43t \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

(2) حلول موجبة عندئذٍ $x > 0$ و $y > 0$

$x > 0 \Rightarrow 500 + 5t > 0 \Rightarrow 5t > -500 \Rightarrow t > -100$

$y > 0 \Rightarrow -4250 - 43t > 0 \Rightarrow -43t > 4250$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow t < -98,83$

عندئذٍ:

$t \in ]-100, -98,83[ \cap \mathbb{Z}$

$\Rightarrow t = -99$

من أجل $t=-99$

نجد:

$x = 500 + 5(-99) = 5$

$y = -4250 - 43(-99) = 7$

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة