كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة :الحادية عشر/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

< مبرهنة المدى والفضاء الصفري >

* إذا كان T مؤثراً خطياً فإن:

أ- المدى $R(T)$ فضاء شعاعي (متجهي) جزئي من الفضاء الذي كونه.

ب- إذا كان $\dim D(T) = n < \infty$ فإن $\dim R(T) \leq n$

ج- الفضاء الصفري $N(T)$ هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $D(T)$.

البرهان:

أ- < الفرض > $T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ مؤثر خطي حيث X, Y فضاءات شعاعية.

< الطلب > المدى $R(T)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي Y.

البرهان:

حتى يكون $R(T)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي Y يجب أن يحقق الشرط التالي: $\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall y_1, y_2 \in R(T): \alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$

$y_1, y_2 \in R(T) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in D(T): y_1 = Tx_1, y_2 = Tx_2$ بما أن

المنا: $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1) + T(\beta x_2)$

$= T(\alpha x + \beta x_2) \in R(T)$

$\Rightarrow$ T خطي $\quad$ $D(T)$

TEL:0931497960 - مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس)

$R(T)$ فضاء خطي جزئي $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$ ومتباعد

من الفضاء الخطي Y.

ب) <العرض> $T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ مؤثر خطي حيث X, Y فضاءان خطيان

$\dim D(T) = n < \infty$

<الطلب> : $\dim R(T) \leq n$

البرهان: حتى نبرهن أن $\dim R(T) \leq n$ يكفي أن نبرهن أن أي مجموعة من

$n+1$ شعاع أو المتجهات من عناصر $R(T)$ فيها $n+1$ فقط أو أكثر مرتبطة خطياً

* من أجل ذلك لنأخذ مجموعة كيفية من المتجهات لتكن

$y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ من عناصر $R(T)$

فيها $n+1$ متجه ولنبرهن أنها مرتبطة خطياً علماً أن:

$y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ متجهات في الفضاء الخطي $R(T)$ و T مؤثر خطي ومتباعد:

$\exists x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in D(T)$:

$y_1 = Tx_1, y_2 = Tx_2, \dots, y_{n+1} = Tx_{n+1}$

علماً أن $\dim D(T) = n < \infty$ مثالي فإن أي مجموعة من عناصر $D(T)$ مؤلفة من $n+1$

متجه أو أكثر تكون مرتبطة خطياً ومثالي فإن:

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$

بحيث ليست جميع المقادير السلمية $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ معدومة علماً أن T مؤثر خطي ومثالي

$T(\alpha x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = T \cdot 0 = 0$

$T(\alpha_1 x_1) + T(\alpha_2 x_2) + \dots + T(\alpha_{n+1} x_{n+1}) = 0$

$\alpha_1 Tx_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n+1} Tx_{n+1} = 0$ و $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0$

بمثالي وهذا أن ليست جميع المقادير معدومة أي مجموعة مرتبطة خطياً وكيفية و #

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ج: المؤثر $T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$

حيث X و Y فضاءان خطيان

المطلب: الفضاء الصفري $N(T)$ هو فضاء خطي جزئي من الفضاء $D(T)$

برهان (ج): لدينا: $N(T) = \{x \in D(T) \text{ و } Tx = 0_{RT}\}$

ولبرهن أن $N(T)$ فضاء خطي جزئي من $D(T)$ أي لبرهن أنّ:

$\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall x_1, x_2 \in N(T)$:

$\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$.

بما أنّ x_1, x_2 من $N(T)$ مباشرة: $Tx_1 = 0 \cap Tx_2 = 0$

لدينا $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \underbrace{Tx_1}_{=0} + \beta \underbrace{Tx_2}_{=0} = 0 \Rightarrow$ (T خطي)

$\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$

$N(T) \subseteq$ فضاء خطي جزئي من الفضاء الذي يجمع فيه أي $D(T)$

ملاحظة: إن المؤثرات الخطية تحافظ على الارتباط الخطي.

* * * *

المؤثر (الخطي) العكسي:

تعريف: أن كان $T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ مؤثراً (خطياً) متبايناً.

حيث X و Y فضاءان خطيان معرفان فوق نفس الحقل K.

عندئذ يوجد في هذه الحالة المؤثر العكسي T^{-1} للمؤثر T بالشكل:

$$T^{-1}: R(T) \subseteq Y \to D(T) \subseteq X$$

والذي ينقل كل عنصر y_0 في $R(T)$ إلى عنصر x_0 من $D(T)$

بحيث يكون $Tx_0 = y_0$ أي $x_0 = T^{-1}y_0$

وتحقق المؤثر الخطي العكسي T^{-1} للمؤثر T العلاقات:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① $T^{-1}\underbrace{T(x)}_{y} = T^{-1}y = x = I(x)$; $\forall x \in D(T)$

② $TT\underbrace{y^{-1}}_{x} = Tx = y = I(y)$; $\forall y \in R(T)$

أي :

$$TT^{-1} = I = T^{-1}T$$

↓ يلعب دور العنصر الحيادي.

* * * * *

مبرهنة المؤثر العكسي :

ليكن X و Y فضاءين ناظميين كلاهما عقدي أو حقيقي .

وليكن $T : D(T) \longrightarrow R(T)$ مؤثراً خطياً

حيث $D(T) \subseteq X$ و $R(T) \subseteq Y$ عندئذ نقول :

P : الشرط اللازم والكافي حتى يكون المؤثر العكسي :

$T^{-1} : R(T) \longrightarrow D(T)$ موجوداً هو أن يكون :

$Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ (بمعنى أن : $N(T) = \{0\}$)

ب - أذا كان T^{-1} موجوداً فإن T^{-1} مؤثر خطي .

جـ - اذا كان $\dim D(T) = n < \infty$ وكان T^{-1} موجوداً عندئذ فإن

$$\dim R(T) = \dim D(T)$$

عندئذ : لزوم الشرط :

برهان (P) الغرض :

فضاءان خطيان X و Y فـ $D(T) \subseteq X \longrightarrow R(T) \subseteq Y$ مؤثر خطي

$T^{-1} : R(T) \longrightarrow D(T)$ موجود

المطلب : تحقق الشرط $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$; $x \in D(T)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان: بما أنّ T^{-1} موجوداً إذاً T متباين أي T تحقق الشرط:

$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \; ; \; x_1, x_2 \in D(T)$

نعوض $x_2 = 0$ في الشرط السابق نحصل على

$Tx_1 = T0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

إذن الشرط التالي محقق:

$Tx = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x \in D(T)$.

كفاية الشرط:

برهان (P): الفرض:

$T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ مؤثر خطي

حيث X، Y فضاءات نظيمية.

تحقق الشرط

$Tx = 0 \Rightarrow x = 0$

المطلوب: T^{-1} موجود

البرهان:

حتى نبرهن أن T^{-1} موجود يكفي أن نبرهن أن T متباين

أي لنبرهن أنّ الشرط التالي محقق:

$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

لدينا $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow Tx_1 - Tx_2 = 0$

لأن T مؤثر خطي $T(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ هو الشرط

T متباين $\Leftarrow$ T^{-1} موجود.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ب. المعطى: $T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ مؤثر خطي.

X و X فضاءات شعاعية فوق نفس الحقل.

T^{-1} موجود

المطلوب T^{-1} مؤثر خطي.

البرهان: بما أن T^{-1} موجود مباشرة

$T^{-1}: R(T) \subseteq 1 \to D(T) \subseteq X$ وبما أن $R(T)$ و $D(T)$

فضاءات خطية أيضاً ومثالي T^{-1} مؤثر

يبقى علينا أن نبرهن أن الشرط T^{-1} خطي: أي لنبرهن أيضاً:

$\forall x, \beta \in k \; \& \; \forall y_1, y_2 \in R(T)$:

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$$

بما أن y_1, y_2 من $R(T)$ و T^{-1} موجود ومثالي حسب تعريف T^{-1} فإن

$$y_1 = Tx_2 \cap y_2 = Tx_2$$

بحيث يكون:

$$x_1 = T^{-1} y_1 \cap x_2 = T^{-1} y_2 \; ; \; x_1, x_2 \in D(T)$$

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = T^{-1}(\alpha x_1 + \beta T x_2)$$

$$= T^{-1}(T(\alpha x_1 + \beta x_2))$$

بما أن T مؤثر خطي.

$$= TT^{-1}(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

$$= \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$$

T^{-1} مؤثر خطي.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

جـ: الفرض: $T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ مؤثر خطي

$\dim D(T) = n < \infty$

و T^{-1} موجود.

الطلب: $\dim R(T) = \dim D(T)$

البرهان: من المبرهنة المدعّم الفضاء الجزئي المنته (ب)

بما أن $\dim D(T) = n < \infty$ فإن

$\dim R(T) \leq n$

$$\Rightarrow \boxed{\dim R(T) \leq \dim D(T)} \quad (1)$$

وبتبديل الدورين T و T^{-1} مؤثر خطي عندئذ وفقاً لنفس البرهنة

فإن: $\dim D(T) \leq \dim R(T)$

من (1) و (2) نجد أن:

$$\dim R(T) = \dim D(T).$$

المؤثرات الخطية المحدودة والمستمرة:

تعريف المؤثر الخطي المحدود: نقول عن المؤثر $T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ حيث X و Y فضاءان منظمان معرفان وفق نفس الحقل أنه محدود إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists\, c \in \mathbb{R} \wedge c > 0 \;;\; \|Tx\| \leq c\,\|x\| \;;\; \forall x \in D(T)$$

بعض الملاحظات: (1) يمكن لـ c أن تساوي الصفر في حالات خاصة حيث c ثابت الفرق في المؤثر الخطي المحدود

(2) من أجل التبسيط نستخدم نفس رمز النظيم وهو $\|\ \|$ في كل الفضاءات

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المنظمين X و Y.

حيث $D(T) \subseteq X$ و $R(T) \subseteq Y$

هناك فرق بين مفهوم الدالة المحدودة في التحليل الحقيقي و مفهوم المؤثر المحدود في الفضاءات المنظمة حيث

بالمفهوم الأول: نقصد الدالة التي تكون مجموعة قيم (صورها) مجموعة محدودة.

بينما الثاني: نقصد المؤثر الخطي الذي ينقل المجموعة المحدودة في $D(T)$ إلى مجموعات محدودة في Y.

×××

(٣-١) تعريف: نظيم مؤثر إذا

$T : D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ مؤثر خطي محدود

عندئذ فإن العلاقة التالية محققة:

① $\|Tx\| \leq c \cdot \|x\|$ و $\forall x \in D(T)$ و $c > 0$

نرمز أصغر أعداد الموجبة (الثوابت الموجبة) c والتي تحقق العلاقة

(١) ينظم المؤثر T ونرمز له بالرمز $\|T\|$.

كيفية حساب $\|T\|$.

$$\|Tx\| \leq c \cdot \|x\|$$

بتقسيم طرفي العلاقة $\|Tx\| \leq c\|x\|$ على $\|x\|$ حيث $x \neq 0$

نجد أن:

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c \quad (*)$$

نلاحظ العلاقة (*) أن الثوابت c أياً كان الثابت c يجب أن x يقل عن الحد الأدنى للطرف الأيسر من المتراجحة (*) عندما x تمسح جميع عناصر

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المجموعة $(X-\{0\})$ وأن أصغر تلك الثوابت حقيقية والتي يأخذها الثابت c وتحقق المتراجحة $(*)$.

والذي هو $\|T\|$ تعريفاً هو الحد الأدنى الأصغري للطرف الأيسر من المتراجحة $(*)$ أي أنّ

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad (1)$$

ملاحظة: أذ عوضنا $\|x\| = 1$ في العلاقة (1) نجد أنّ:

$$\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\|$$ نحفظ

ملاحظة: يمكن حساب $\|T\|$ نظيم المؤثر T من أحد العلاقتين (2) و (3)

ملاحظة: يرمز لفضاء جميع المؤثرات الخطية المحدودة والمعرفة على الفضاء الخطي X متأخذ قيمها من الفضاء الخطي Y بالرمز $B(X,Y)$

نلاحظ العلاقة $(*)$ أن الثوابت c أذ أياً كان c يجب أن لا يخل عن الحد الأدنى الأصغري من المتراجحة $(*)$ عندما x تمسح جميع عناصر المجموعة $(X-\{0\})$ وأن أصغر تلك الثوابت حقيقية والتي يأخذها الثابت c وتحقق المتراجحة $*$

أسئلة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة