كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة :العاشرة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تكلمنا في المحاضرة السابقة عن التراص:

نقول عن الفضاء المتري (المنظم) $(X, \|\cdot\|)$ أنه فضاء متراصاً إذا وفقط كل متتالية في X متتالية جزئية متقاربة إلى نقطة في X.

* نقول عن المجموعة $M \subset X$ أنها مجموعة متراصة في X أو كان بالإمكان من كل متتالية في M استخراج متتالية في M جزئية منها متقاربة في X.

بداية المحاضرة التاسعة:

أنهت المحاضرة السابقة

مثال: الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ هو فضاء منظم وفضاء متري ولكنه ليس متراصاً لأن المتتالية التي حدها العام $x_n = n$; $n = 1, 2, \ldots$ أي $(x_n) = (n)_{n\geq 1}$ من نقط الفضاء $\mathbb{R}$ لا يمكن استخراج أي متتالية جزئية متقاربة من $(n)_{n\geq 1}$.

ملاحظة: إذا وجدت متتالية واحدة على الأقل في فضاء متري (منظم) X لا يمكن استخراج أية متتالية جزئية منها متقاربة في هذا الفضاء عندئذ نجزم فوراً أن هذا الفضاء فضاء غير متراص.

نواة التراص:

كل مجموعة جزئية M في أي فضاء منظم (متري) X تكون مغلقة ومحدودة

أولاً: لنبرهن أن M مجموعة مغلقة من X لا بد أن M تراصية في X

من الفرض حتى نبرهن أن M مغلقة في X يكفي أن نبرهن أن $M=\bar{M}$ ← لماذا؟

نعلم أن $M \subseteq \bar{M}$ ① ونبرهن أن $\bar{M} \subseteq M$

$\forall x \in \bar{M} \Rightarrow \exists (x_n)_{n\geq 1} : x_n \in M$ و $n=1,2,\dots$ و $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$

(حسب برهنة المجموعة المغلقة الصافة بند II)

(لأن M مجموعة تراصية وبالتالي أي متتالية متقاربة فيها تكون من M)

$\bar{M} \subseteq M$ ② ⇐

من 1، 2 نجد أن $M=\bar{M}$ ⇐ M مجموعة مغلقة.

نبرهن بطريقة أخرى:

M تراصية ⇐ من كل متتالية في M يمكن أستخراج متتالية جزئية متقاربة

إذن نقطة في M، M تراصية ونبرهن أنها مغلقة وتكون مغلقة عندما $M=\bar{M}$ أي

لنبرهن أن $\bar{M} \subseteq M$ ، $M \subseteq \bar{M}$ محققة

$\forall x \in \bar{M} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\geq 1} : x_n \in M$ و $n=1,\dots$ و $x_n \to x$

بما أن M تراصية ← بتالي كل متتالية جزئية من $(x_n)_{n\geq 1}$ تكون متقاربة نحو نفس النقطة x

وبما أن M تراصية وبتالي $x \in M$ ، $\bar{M} \subseteq M$

ثانياً: الفرض: X فضاء منظم أقل متري و $M \subseteq X$ مجموعة تراصية في X

المطلوب: M مجموعة محدودة في X.

البرهان: لنفرض جدلاً أن المجموعة M غير محدودة في X

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عندئذٍ يوجد في M متتالية واحدة على الأقل ولتكن (x_n) في M محدودة بحيث يكون $\|x_n - b\| > \varepsilon$ من أجل b عنصر مثبت من المجموعة M و $n \geq 1$ و $n \in \mathbb{N}$ و $\varepsilon > 0$ وبالتالي لا يمكن استخراج أي متتالية جزئية متقاربة من هذه المتتالية الجزئية لو تقاربت ستكون محدودة (لأن كل متتالية متقاربة محدودة) ولكن هذا يناقض الفرض لكون M مجموعة متراصة وبالتالي الفرض خاطئ

و M مجموعة محدودة في X.

بشكل عام: M متراصة في أي فضاء متري أو منظم ← 1- M مغلقة.

2- M محدودة.

والآن إذا كانت M محدودة في X و X فضاء منظم أو متري فليس من الضروري أن تكون M متراصة في الحالة العامة

ولكن إذا كانت M مغلقة في X و X فضاء منظم متري فليس من الضروري أن تكون M متراصة في الحالة العامة وإذا كانت أيضاً M مجموعة مغلقة ومحدودة في فضاء منظم (متري) X فليس من الضروري أن تكون M مجموعة متراصة من M.

جوهرة التراص: الشرط اللازم والكافي حتى تكون مجموعة جزئية من فضاء منظم متري البعد $(X, \|\cdot\|)$ متراصة هنا أن تكون مغلقة ومحدودة.

ملاحظة هامة جداً: في الفضاءات المنظمة المنتهية البعد فإن المجموعة الجزئية المتراصة فيها هي بالضبط المجموعات الجزئية المغلقة والمحدودة وهذه الخاصة لا تصح من أجل جميع الفضاءات المنظمة فقط المنتهية البعد.

مثال: في الفضاء المنظم $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ فضاء منتهي البعد فإن المجموعة $[0,1]$ مجموعة مغلقة ومحدودة في $\mathbb{R}$ أذاً هي مجموعة متراصة و $]0,1[$ مجموعة مغلقة ولكنها محدودة في $\mathbb{R}$ أذاً هي مجموعة متراصة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتيجة هامة جدا: إن الكرات المغلقة في الفضاء المنظم منتهي البعد تكون مجموعات متراصة مرفقة لبرهنة البراهين.

عكس كل شيء

المجموعات المراصة المحدودة بيرمراصة.

* * * * * * * * * * * *

المؤثرات الخطية:

درسنا في التحليل الحقيقي الدوال الحقيقية المعرفة على مجموعة جزئية من الحقيقية $\mathbb{R}$ (الفضاء الحقيقي)

اليوم ندرس الدوال المعرفة على فضاءات أعم مثل الفضاءات المترية والخطية والمنظمة اليوم ندعو الدوال في حالة الفضاءات المنظمة الخطية بـ ((المؤثرات)).

تعريف المؤثر: ليكن X و Y فضاءين منظمين أو فضاءين متريين ندعو كل تطبيق $T: X \to Y$ معرف بالشكل

$y = Tx$ ، $x \in X$ و $y \in Y$

مؤثراً من X إلى Y واختصاراً T مؤثر

ونرمز لمجموعة المؤثر T (منطقة تعريفه) بالرمز $D(T)$ أما مدى هذا المؤثر (أو مجموعة قيمه) فنرمز له بالرمز $R(T)$

بعض الملاحظات:

(أ) $D(T)$ ليست من الضروري أن تساوي إلى X دائماً مع أن $D(T)$ يجب أن تكون فضاء خطي لذلك نفرض أن $D(T)$ فضاء خطي جزئي من فضاء الخطي X.

(ب) $R(T) = \{ y \in Y \text{ (كبيرة)} \text{ و } y = Tx \text{ أي } Tx = y \text{ و } x \in D(T) \}$ (صغيرة)

وهو يجب أن تكون فضاء خطي جزئي أو منظم من الفضاء الخطي (منظم) Y كبيرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ومعرّف على نفس الحقل المعرف عليه D(T).

* * * * * * *

ج) حدّد المؤثر بحرف أتا بالشكل:

$T: X \longrightarrow Y$ حيث Y و X فضاءان خطيان

أو بالشكل:

$T, D(T) \subset X \longrightarrow R(T) \subset Y$

حيث X و Y فضاءات خطية معرفان فوق نفس الحقل (أي فضاءان متشابهان جداً أو متطابقان تماماً))

و D(T) فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي X سنبرهن لاحقاً أن R(T) أيضاً فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي Y.

د) يدعو T مؤثراً غامراً أذا تحقق الشرط التالي:

$\forall y \in R(T) \quad \exists x \in D(T): \; y = Tx$

أو اذا كان: $Y = R(T)$

هـ) يدعو المؤثر T متبايناً اذا تحقق احدى الشرطين

1- $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \; ; \forall x_1, x_2 \in D(T)$

2- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in D(T)$

و) نقول عن المؤثرين T_1 و T_2 أنهما مؤثران متساويان أذا كان لهما الساحة والمدى نفسه وتحقق قاعدة الربط.

* * * * *

المؤثرات الخطية: تعريف: ليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثراً حيث Y و X فضاءان (متطابقان) خطيان متشابهان تماماً أذ حققا ما يلي يدعو المؤثر T مؤثر

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خطي أذ تحققت الشرطين

1) $T(x_1+x_2) = Tx_1 + Tx_2 \quad ; \forall x_1, x_2 \in X$

2) $T(\alpha x) = \alpha Tx \quad ; \forall \alpha \in K \text{ و } x \in X$

$\in \mathbb{R}$

بعض الملاحظات والمفاهيم الأساسية:

1- يمكن دمج الشرطين في 2 شرط واحد فيكون

A) $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2$ ف

$\forall \alpha, \beta \in K$ ؛

$(K = \mathbb{C} \text{ or } \mathbb{R}) \text{ و } \forall x_1, x_2 \in X$

2- الفضاء الصفري لـ T (نواة المؤثر T) ويرمز له بالرمز $N(T)$ ويعرف بأنه مجموعة العناصر x من X بحيث صورها وفق T تساوي صفر الفضاء الخطي Y أي:

$$N(T) = \{ x \in X \text{ و } Tx = 0_Y \}$$

(فراغ)

المؤثر الخطي T تحقق دوماً: $T0_X = 0_Y$ كونه أذ عوضنا

من الشرط (2) $\alpha = 0$ نجد أنّ

$$T0.x = T_{0.x} = T_{0.k}$$

$x \in$

من جهة أخرى نجد أنّ:

$$\alpha Tx = 0.Tx = 0.y = 0_Y$$

أي $T0_X = 0_Y$

و $T0.x = T_{0.x} = 0.Tx = 0.y = 0_Y$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* نقول عن المؤثر الخطي T أنه مستمر في النقطة $x = x_0$ إذا كانت العلاقة

$$\lim_{x \to x_0} Tx = Tx_0$$

نرمز لمجموعة جميع المؤثرات الخطية من X إلى Y بالرمز $L(x,y)$.

بعض الأمثلة عن المؤثرات الخطية:

1- المؤثر المطابق: $I : X \longrightarrow X$ حيث X فضاء خطي معرف بالشكل: $\forall x \in X : Ix = x$; $\forall \alpha, \beta \in K$ $\forall x_1, x_2 \in X$ مؤثر خطي لأنه

$$I(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 =$$

$$= \alpha \cdot Ix_1 + \beta Ix_2$$

2- المؤثر الصفري:

$$0 \quad X \longrightarrow Y$$

$0(x) = 0_y$ مؤثر خطي (لماذا؟)

3- مؤثر المفاضلة: ليكن X فضاء خطي لمجموعة جميع كثيرات الحدود المعرفة على المجال $[a,b]$ ولنتعرف على هذا الفضاء مؤثر المفاضلة T أي

$$T : X \longrightarrow X$$

$$Tx(t) = \dot{x}(t) \; ; \; \forall t \in [a,b].$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لاننا أن X صرة:

$X = \{x : x = x(t) \; ; \forall t \in [a,b]$ مستمر $\}$

مؤثر خطي لأنه:

1) $T(x_1 + x_2)(t) = (x_1 + x_2)'(t) = x_1'(t) + x_2'(t) = Tx_1(t) + Tx_2(t) \; ; \forall x_1, x_2 \in X$

2) $T(\alpha x)(t) = (\alpha x)'(t) = \alpha \dot{x}(t) \; ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\forall x \in X$

أنتهت المحاضرة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z