كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة :التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

* توطئة التراكيب الخطية:

إذا كانت $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة من المتجهات مستقلة خطياً من فضاء منظم X (أياً كان بعده سواء أكان منتهي البعد أم لا) عندئذ توجد عدد موجب c بحيث تحقق المتراجحة التالية:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \geq c \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

أي بالشكل:

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|)$$

* مبرهنة الهام: هام

كل فضاء جزئي منتهي البعد من الفضاء منظم X أياً كان بعده هو فضاء تام (بشكل خاص (كل فضاء منظم منتهي البعد تام)).

البرهان: هام جداً

بما أن Y فضاء منظم منتهي البعد، لنفرض أن $\dim Y = n < \infty$

وأن $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

قاعدة للفضاء Y.

الآن لنبرهن أن Y فضاء تاماً من أجل ذلك لنأخذ متتالية كيفية لكوشي ولتكن $(y_m^{(m)})$ في الفضاء Y.

ولنبرهن أن هذه المتتالية متقاربة.

- بما أنّ $y^{(m)} \in Y$ من أجل $m = 1, 2, \dots$

$$y^{(m)} = \alpha_1^{(m)} e_1 + \alpha_2^{(m)} e_2 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} e_i \quad ; \quad \forall \alpha_i^{(m)} \in \mathbb{K} \quad i = 1, \dots, n$$

من وجهة أخرى $(y^{(m)})_{m \geq 1}$ لكوشي في الفضاء Y متقاربة وهي تحقق الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \; \forall m, r \geq N(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \| y^{(m)} - y^{(r)} \| < \varepsilon$$

لدينا:

$$\varepsilon > \| y^{(m)} - y^{(r)} \| = \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \|$$

$$= \| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}) e_i \|$$

حسب متراجحة المثلث $\leq c \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}|$ حيث c ثابت موجب

أضع لدينا: $\varepsilon > c \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}|$

$$\Rightarrow \sum |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c}$$

$\forall \varepsilon > 0$; $\forall m, r \geq N(\varepsilon)$ فـ

$$\Rightarrow |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c}$$

متتاليات

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall \varepsilon > 0 \ \& \ \forall m,r \geq N(\varepsilon)$ حيث n ... ,2,1 = i

أي أن الشرط التالي تحقق :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ و

$\forall m,r \geq N(\varepsilon)$

$\Rightarrow |x_i^{(m)} - x_i^{(r)}| < \varepsilon$ ... ,2,1 = i

أي أن كلاً من المتتاليات العددية

$x_i^{(m)} = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots, x_i^{(m)}\}$

في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ من أجل n ... ,2,1 = i

هي متتاليات لكوشي في الفضاء $\mathbb{R}$ أو الفضاء $\mathbb{C}$.

وبما أن $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ فضاء تام فإنه نستنتج أن كلاً من المتتاليات العددية

$(x_i^{(m)})_{m\geq 1}$ حيث n ... ,2,1 = i

متتاليات متقاربة في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ ولنفرض أن $\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i$

من أجل $i = 1, 2, \dots, n$

حيث $x_i \in \mathbb{R}$ أو $x_i \in \mathbb{C}$

الآن لنشكل العنصر :

$$y = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

~~$y^{(m)} = x_1^{(m)} e_1 + x_2^{(m)} e_2 + \dots + x_n^{(m)} e_n$~~

نلاحظ أن y تركيب خطي لعناصر القاعدة $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

و $x_i \in \mathbb{R}$ أو $x_i \in \mathbb{C}$

من أجل $i = 1, 2, 3, \dots, n$

بقي علينا أن نبرهن أن $y \in X$ حيث $\lim_{m\to\infty} y^{(m)} = y$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لدينا $0 \leq \|y^{(m)} - y\|$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i) e_i \right\|$$

$$= \|(\alpha^{(m)} - \alpha_1)e_1 + (\alpha_2^{(m)} - \alpha_2)e_2 + \dots + (\alpha_n^{(m)} - \alpha_n)e_n\|$$

$$\leq \|(\alpha_1^{(m)} - \alpha_1)e_1\| + \|(\alpha_2^{(m)} - \alpha_2)e_2\| + \dots$$

$$\|(\alpha_n^{(m)} - \alpha_n)e_n\|$$

$$\leq |\alpha_1^{(m)} - \alpha_1| \|e_1\| + |\alpha_2^{(m)} - \alpha_2| \|e_2\| + \dots +$$

$$|\alpha_n^{(m)} - \alpha_n| \|e_n\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i| \|e_i\|$$

أصبح لدينا:

$$0 \leq \|y^{(m)} - y\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i| \|e_i\|$$

ومن النهاية في أطراف المتراجحة السابقة

عندما $m \to \infty$ نجد أنّ:

$$\lim_{m \to \infty} (y^{(m)} - y) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \to \infty} y^{(m)} = y$$

وبما أنّ $y^{(m)}$ متتالية لعنصر كيفية في الفضاء X متقاربة

نحو متتالي X فضاء تام. ـــــــــ

برهنة الإغلاق: تحليل

كل فضاء جزئي منتهي البعد لأي الفضاء منظم X يكون مغلقاً في X (لماذا؟)

لأن كل فضاء جزئي منتهي البعد لأي فضاء منظم X هو تام والشرط اللازم والكافي

حتى تكون الفضاء تام وهو أن يكون مغلقاً وبتالي تحققت البرهنة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

النظائم المتكافئة:

تعريف النظائم المتكافئة:

إذا كان $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نظيمان على الفضاء الخطي X فإننا نقول إن النظيم $\|\cdot\|_1$ مكافئ للنظيم $\|\cdot\|_2$ (أي النظيمان متكافئان).

أي إذا وجد عددان حقيقيان a و b بحيث يتحقق الشرط التالي:

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2 \quad *$$

يتم استخدام هذه العلاقة $\forall x_0 \in X$ في البرهان تكافؤ نظيمين.

ونكتب في هذه الحالة: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$

ملاحظة: إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل x_0 من X لا تتحقق عندها العلاقة السابقة

(*) قلنا عن النظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$

أنهما غير متكافئين (أو الحال العكسي)

$$a\tilde{d}(x,y) \leq d(x,y) \leq b\tilde{d}(x,y)$$

متكافئان

جميع النظائم المتكافئة:

- كل نظيم $\|\cdot\|$ معرف على فضاء خطي منتهي البعد X يكافئ أي نظيم آخر $\|\cdot\|'$ على X

البرهان: الفرض: X فضاء خطي منتهي البعد أي $\dim X = n < \infty$

$\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|'$ نظيمان معرفان على X.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بما أنّ $\dim X = n$ عندئذٍ يعرف أنّ $\{e_1, \dots, e_n\}$ قاعدة لـ X

مستقلة خطياً لـ X ↓

مولّدة

عندئذٍ أي عنصر من X يكتب على شكل تركيب خطي لعناصر القاعدة

القاعدة أي:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad ; \quad x_i \in K \quad ; \quad i = 1, \dots, n.$$

حسب قاعدة التراكيب الخطية

$$\exists c_1 > 0 \quad ; \quad \|x\| =$$

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \| \geq c_1 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_1} \|x\| \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\exists c_2 > 0 \quad ; \quad \|x\|_0 =$$

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \|_0 \geq c_2 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_2} \|x\|_0 \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad (2)$$

من جهة أخرى برهنا على متراجحة المثلث كما أنّ:

$$\|x\| = \| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \|$$ حيث جواب نظيم

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الشرط الثالث والشرط النظيم:

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|e_i\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot k$$

$$= k \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

نفرض:

$$k = \max\{\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_n\|\}$$

أصبح لدينا:

$$\|x\| \leq k \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \quad (3)$$

ونفس الطريقة تمامًا:

النظيم الصغرى لـ x

$$\|x\|_0 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_0$$

بالاعتماد على شرط النظيم.

$$\downarrow \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|e_i\|_0$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot k' = k' \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k'} \|x\|_0 \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \quad (4)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث:

$$k' = \max\{\|e_1\|_\circ, \|e_2\|_\circ, \dots, \|e_n\|_\circ\}$$

بمقارنة المتراجحتين ① و ② أي:

$$\frac{1}{k'}\|x\|_\circ \le \sum_{i=1}^{n}|x_i| \le \frac{1}{c_1}\|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{c_1}{k'}\|x\|_\circ \le \|x\|$$

$$\Rightarrow a\|x\|_\circ \le \|x\| \text{ و } a = \frac{c_1}{k'} > 0$$

بمقارنة ② مع ③ نجد أن:

$$\frac{1}{k}\|x\| \le \frac{1}{c_2}\|x\|_\circ$$

$$\Rightarrow \|x\| \le b\|x\|_\circ ; b = \frac{k}{c_2} > 0$$

من كل ④ و ⑤ نجد أن الشرط التالي محقق:

$$a\|x\|_\circ \le \|x\| \le b\|x\|_\circ$$

$a, b > 0$ و

والنظيمان $\|\ \|$ و $\|\ \|_\circ$ متكافئان.

* التراصّ في الفضاء المتجهي:

تعريف التراص: نقول عن الفضاء المنظم (المتري) $(E, \|\ \|)$

أنه فضاء متراص إذا وجدت كل متتالية من X متتالية جزئية متقاربة

إلى نقطة من X.

أي

نقول عن المجموعة $M \subset X$ مجموعة متراصة من X إذا كانت بإمكان

حيث كل متتالية في M_1 تقترب متتالية جزئية منها متقاربة في X.

أثبت

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة