كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي ١

المحاضرة :الثامنة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

- الفضاء ℓ^p هو فضاء منظم نظيمة يعطى بالعلاقة

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \forall x = (\xi_i)_{i\geq 1} \in \ell^p \; ;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$$

الفضاء ℓ^{∞} هو فضاء منظم نظيمة يعطى بالعلاقة:

$$\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i| \quad ; \forall x = (\xi_i)_{i\geq 1}$$

وهو فضاء متري مسافته تعطى بالعلاقة:

$$d(x,y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i|$$

ويمكن الحصول على نظيمة من العلاقة:

$$\|x\| = d(x,0) = \|x - 0\| = \sup_{i\in I} |\xi_i - 0| = \sup_{i\in I} |\xi_i| .$$

الفضاء $C[a,b]$ هو فضاء منظم ونظيمة يعطى بالعلاقة:

$$\|x\| = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)| \quad ; \forall x = x(t) \in C[a,b]$$

وهو فضاء متري منظم مسافته تعطى بالعلاقة

$$d(x,y) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)|$$

ويمكن الحصول على نظيم $C[a,b]$ من العلاقة:

$$d(x,0) = \|x - 0\| = \|x\| \Rightarrow \|x\| = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)|$$

$$d(x,0) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - 0(t)| = \max |x(t)|$$

إذاً $C[a,b]$ فضاء منظم مع نظيم آخر يعطى وفق العلاقة:

$$\|x\|_{\sim} = \int_a^b |x(t)|\, dt$$

وهو فضاء متري مع المسافة $\tilde{d}$ المعرفة بالشكل

$$\tilde{d}(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt \; ; \; \forall x = x(t) \in C[a,b] \; ; \; y = y(t)$$

ويمكن الحصول على نظيم هذا الفضاء بالشكل:

لدينا: ① $\tilde{d}(x,0) = \|x - 0\|_{\sim} = \|x\|_{\sim}$

② $\tilde{d}(x,0) = \int_a^b |x(t) - 0(t)|\, dt = \int_a^b x(t)\, dt$

$\forall\, 0 = 0(t) \; ; \; x = x(t) \in C[a,b]$

من ① و ② نجد أن

$$\|x\|_{\sim} = \int_a^b |x(t)|\, dt$$

فضاءات باناخ: هو فضاء منظم: نقول عن الفضاء المنظم أنه فضاء باناخ إذا كانت كل متتالية لكوشي متقاربة فيه أي أنه فضاء منظم وهو تام بالنسبة للنظم المعرف عليه مثال الفضاء الأقليدي R^n هو فضاء تام بالنسبة للنظم المعرف عليه أي أنه لباناخ أيضاً R فضاء باناخ و $\mathbb{C}$ باناخ.

- لبرهان أن فضاء X منظم هو فضاء تام أو لباناخ:

نتبع الخطوات التالية:

1- نأخذ المتتالية كيفية لكوشي من نقط الفضاء X ولتكن $(x_n)_{n\geq1}$

2- نوجد عنصراً x يكون نهاية المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$

3- نثبت أن $x_n \to x$ ~~[illegible]~~

4-

نتحقق أن $x \in X$

على سبيل المثال برهان أنّ $\mathbb{R}^n$ فضاء باناخ:

الحل: نأخذ متتالية كيفية لكوشي وهي $(x^{(m)}) = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})_{m \geq 1}$

في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ولنثبت أنّ متقاربة فيه

بما أن $(x^{(m)})_{m\geq 1}$ متتالية لكوشي في الفضاء $\mathbb{R}^n$ وبالتالي فهي تحقق الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \ \forall m, r \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|x^{(m)} - x^{(r)}\| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(r)})^2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(r)})^2 < \varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow |x_i^{(m)} - x_i^{(r)}| < \varepsilon ; \ \forall m, r > \varepsilon(N)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

الآن من أجل i منتهية فإن الشرط التالي محقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \forall m, r \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_i^{(m)} - x_i^{(r)}| < \varepsilon$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$

أي أن المتالية الحقيقية $(x_i^{(m)}) = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots\}$

هي لكوشي في الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ لأنه تحقق شرط كوشي من أجل $i = 1, 2, \dots, n$

أي أن كلاً من المتاليات الحقيقية $(x_i^{(m)})_{m\geq 1}$ من أجل $i = 1, 2, 3, \dots, n$ هي لكوشي

في الفضاء $\mathbb{R}$ وبما أن $\mathbb{R}$ فضاء باناخ أيضاً وبالتالي فأن كلاً من المتاليات الحقيقية

$(x_i^{(m)})_{m\geq 1}$ متقاربة إلى النقطة x_i من أجل $i = 1, 2, \dots, n$

أي : $\lim_{m\to+\infty} x_i^{(m)} = x_i$ و x_i من $\mathbb{R}$ من أجل $i=1,2,3,\dots,n$

و بتشكيل العنصر $x = (x_1, \dots, x_n)$ نجد أنّ $x \in \mathbb{R}^n$ ($\ni R$, $\ni R$)

بقي علينا أن نثبت أنّ $x^{(m)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} x$

نجعل $k \to +\infty$ في المراجحة $\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^{(m)} - x_i^{(k)})\right)^2} < \varepsilon$

أي $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{m} - x_i)^2} < \varepsilon$

$$\| x^{(m)} - x \| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x^{(m)} \longrightarrow x$$

بما أنّ $(x^{(m)})_{m\geq 1}$ متتالية لكوشي كيفية من $\mathbb{R}^n$ متقاربة لنقطة منه متتالي $\mathbb{R}^n$ فضاء تام أذاً $\mathbb{R}^n$ فضاء باناخ.

ملاحظة: بما أن كل فضاء منظم X هو فضاء متري أذاً جميع المفاهيم التبولوجية والنظريات الذي تكون صحيحة من أجل الفضاءات المترية تكون صحيحة من أجل الفضاءات المنظمة مثل التقارب ومتتاليات كوشي ..... الخ.

تعريف المتتالية المتقاربة: $(x_m)_{m\geq 1}$ متتالية متقاربة في X فضاء متري في النقطة $x \in X \Leftarrow$ الشرط التالي محقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \in \mathbb{N} ; \ \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

الآن اذا كان X الفضاء منظماً أذاً هو فضاء متري و $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية في X متقاربة من x

أي أن الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \; \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

أي: $\|x_n - x\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ إذاً

$$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \iff d(x_n, x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \iff \|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

بدءاً من التقارب للمتتاليات $(x_n)_{n \geq 1}$ نحو x في الفضاء المنظم X تقارب بالنظيم

متتاليات كوشي: نقول عن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ أنها لكوشي في الفضاء المنظم X

X فضاء منظم $\Leftarrow$ X فضاء متري $\Leftarrow$ الشرط هو:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \; \forall n, r \geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_r) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|x_n - x_r\| < \varepsilon$$

إذاً $(x_n)_{n\geq 1}$ لكوشي في فضاء منظم X $\iff \|x_n - x_r\| \underset{\substack{r \to \infty \\ n \to \infty}}{\longrightarrow} 0 \iff d(x_n, x_r) \underset{\substack{r \to \infty \\ x \to \infty}}{\longrightarrow} 0$

- الكرة الواحدية المغلقة (المفتوحة): ندعو الكرة التي مركزها هو θ (صفر الفضاء الخطي) ونصف قطرها 1 في الفضاء منظم X بالكرة الواحدية المغلقة (المفتوحة) ونرمز لها بالرمز: $B(\theta, 1)$ ($B(\theta, 1)$) بأنها المجموعة:

المغلقة $B(\theta, 1) = \{x \in X ; \|x\| \leq 1\}$

المفتوحة $B(\theta, 1) = \{x \in X ; \|x\| < 1\}$

- القشرة الكروية التي مركزها θ ونصف قطرها 1 نرمز لها بـ $S(\theta, 1)$

فنكتب $S(\theta, 1) = \{x \in X ; \|x\| = 1\}$ قشرة واحدية كروية مركزها الصفر

• القطعة المستقيمة: في الفضاء المنظم X ندعو مجموعة النقط

$$M = \{ z \in X ; z = \alpha x + (1-\alpha) y ; 0 \le \alpha \le 1 \}$$

$\alpha \in [0,1]$

واصلة بين نقطتين x و y من X حيث X فضاءً منظماً.

• تعريف المجموعة محدبة: في الفضاء المنظم X اذا كان X فضاءً منظماً ندعو المجموعة الجزئية A من X $A \subseteq X$ مجموعة محدبة اذا أمكن الوصل بين أي نقطتين من A بقطعة مستقيمة محتواة بأكملها في المجموعة A

مجموعة غير محدبة — مجموعة محدبة

تمرين للعملي: أثبت أنَّ الكرة (الكرة الواحدية) المغلقة في الفضاء منظم X أيضاً هي مجموعة محدبة في فضاء منظم X.

سؤال العملي: أوجد كرات الواحدية في الفضاءات المنظمة التي مرت معنا ونظم

* * * * *

الفضاءات الجزئية المنظمة:

تعريف الفضاء الجزئي المنظم:

ليكن X فضاء منظم و Y مجموعة جزئية منه أي $Y \subseteq X$ ندعو Y فضاءً جزئياً منظماً من الفضاء X اذا كان

أولاً: Y فضاء جزئي باعتبار X فضاء خطي.

ثانياً: Y النظم عليه هو فضاء منظم تام بالنسبة للنظم.

وجدنا أنَّ فضاء باناخ هو فضاء منظم تام بالنسبة للنظم.

ملاحظة: ندعو الفضاء الجزئي الخطي Y من فضاء باناخ X فضاء جزئي منظم من X باعتبار X فضاء منظم

2- ليس من الضروري أن يكون كل فضاء جزئي منظم Y من فضاء باناخ X هو فضاء باناخ .

والسؤال الذي يطرح نفسه : متى يكون كل فضاء جزئي منظم من فضاء باناخ X هو لباناخ ؟

وجدنا سابقاً أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون فضاء جزئي متري Y من فضاء متري تام X فضاءً تاماً هو أن يكون Y مغلقاً في X

- بما أن كل فضاء منظم هو فضاء متري مباشرة نستنتج النظرية التالية :

نظرية : الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء المنظم $(Y, \|\ \|)$ من فضاء باناخ $(X, \|\ \|)$ هو فضاء باناخ هو أن تكون المجموعة Y مغلقة في الفضاء المنظم $(X, \|\ \|)$

مثال : الفضاء المنظم $(\mathbb{R}, |\ |)$ هو فضاء باناخ

ولكن الفضاء الجزئي المنظم منه $(]0,1[, |\ |)$ ليس لباناخ لأن $Y =]0,1[\subset \mathbb{R}$ ليست مغلقة في الفضاء $(\mathbb{R}, |\ |)$ أما الفضاء الجزئي المنظم $([0,1], |\ |)$ من الفضاء المنظم $(\mathbb{R}, |\ |)$ فهو فضاء باناخ لأن $Y = [0,1]$ مجموعة مغلقة في الفضاء $(\mathbb{R}, |\ |)$.

للتأكيد : نتيجة : ليس من الضروري أن يكون كل فضاء جزئي منظم من فضاء باناخ لباناخ في الحالة العامة

للتأكيد : نتعامل مع الفضاء الجزئي منظم من فضاء باناخ X باعتبار Y فضاءً منظماً بغض النظر عن كون X لباناخ .

الفضاءات المنظمة المنتهية البعد:

تعريف الفضاء المنظم المنتهي البعد: هو عبارة عن فضاء خطي مزود بنظيم وله قاعدة عدد عناصر هذه القاعدة منتهياً ويمكن تمثيل أي عنصر من عناصره بدلالة عناصر هذه القاعدة أي كتركيب خطي لعناصر هذه القاعدة

مثل الفضاء R^n و C^n

مثلاً: الفضاء R^n: بعده هو n أي $\dim R^n = n$ بأي قاعدة له تحوي n عنصراً مستقل خطياً مع بعضها

حيث القاعدة القانونية (النظامية) له مؤلفة من n عنصراً هي:

$$E = \{e_1(1,0,0,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,0,\dots), \dots, e_n(0,\dots,1)\}$$

$$\forall x \in R^n ; x = (x_1,\dots,x_n)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots x_ne_n$$

$$= x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,0,0,\dots,0) + x_n(0,0,0,\dots,1)$$

$$= (x_1,0,\dots,0) + (0,x_2,0,0,\dots) + \dots + (0,0,\dots,x_n).$$

The end