كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

أمثلة عن الفضاءات المترية:

1- الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ هو الفضاء شعاعي فوق نفسه أي $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ فضاء شعاعي (فضاء خطي) فوق نفسه حيث العمليتين $\cdot$ و $+$ هما الجمع والضرب العاديان.

2- الفضاء $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ C فضاء شعاعي فوق نفسه حيث $+$ و $\cdot$ العمليتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ العاديتان.

3- $\mathbb{R}$ فضاء خطي حقيقي أي الفضاء الخطي فوق الحقل $\mathbb{R}$ بالنسبة العمليتان

* الأولى: داخلية وهي $(+)$ المعرفة بالشكل

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ، $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، $y = (y_1, \dots, y_n)$

$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

* الثانية: خارجية وهي ضرب

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ و $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

البرهان بالعكس

4- فضاء المتتاليات المحدودة وهو ℓ^∞.

مجموعة المتتاليات العددية الحقيقية المحدودة هي فضاء خطي بالنسبة العمليتان * الأولى: داخلية $(+)$

$\forall x = (x_i)_{i \geq 1} \in \ell^\infty$ و $y = (y_i)_{i \geq 1} \in \ell^\infty$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$x+y = (x_1+y_1, \dots, x_i+y_i, \dots)$

$x+y = (x_i+y_i)_{i\geq 1}$

*الثابتة (.) خارجية:

$\forall x \in \mathbb{C} \ \& \ \forall x = (x_i)_{i\geq 1} \in l^\infty ; \alpha x = (\alpha x_i)_{i\geq 1}$

5- الفضاء l^p: مجموعة جميع المتتاليات اللانهائية (العقدية أو الحقيقية) $x=(\xi_i)_{i\geq 1}$ والتي تحقق

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$$

هو فضاء شعاعي فوق الحقل k بالنسبة للعمليتان: داخلية (+)

$\forall x = (x_i)_{i\geq 1} \in l^p \ \& \ y = (y_i)_{i\geq 1} \in l^p \Rightarrow x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_i+y_i) = (x_i+y_i)_{i\geq 1}$

2- الثابتة (الخارجية) (.): $\forall \alpha \in k \ \& \ \forall x = (x_i)_{i\geq 1} \in l^p$

$\alpha x = (\alpha x_i)_{i\geq 1}$

6- الفضاء: $C[a,b]$: فضاء شعاعي فوق الحقل $\mathbb{R}$ بالنسبة للعمليتان:

الأولى: داخلية (+) والتي:

$\forall x, y \in C[a,b]$

$(x+y)(t) = x(t) + y(t) \ ; \ x = x(t) \ \& \ y = y(t)$

*الثابتة الضرب (.) خارجية:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \& \ \forall x = x(t) \in C[a,b] \Rightarrow (\alpha x)(t) = \alpha \cdot x(t)$

تعريف: نقول عن $F: V \longrightarrow V'$ أنه تطبيق خطي أي V و V' فضاءان شعاعيان فوق الحقل k إذا تحقق الشرطان:

1- $\forall x, y \in V, \ F(x,y) = f(x) + f(y)$

2- $\forall \alpha \in k \ \& \ x \in V, \ F(\alpha x) = \alpha F(x)$

يكافئ الشرط السابق F تطبيق خطي أي $\Leftrightarrow$

$F(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف الفضاء الخطي الجزئي:

إذا كان V فضاء خطياً فوق الحقل k عندئذٍ نقول عن المجموعة الجزئية M من V أنها تشكل فضاء خطي جزئي من الفضاء V إذا تحقق الشرط

$$\forall \alpha, \beta \in k \ \& \ \forall x, y \in M : \alpha x + \beta y \in M.$$

ملاحظة: إذا كان التطبيق الخطي $F: V \to V'$ غامراً وتباينياً عندئذٍ نقول عنه إنه تشاكل وكتب $V' \cong V$ أي V و V' أيضاً متماثلين.

ملاحظة: من أي فضاء خطي V فوق حقل ما k دوماً لدينا فضاءان خطيان جزئيان هما الفضاء الجزئي المؤلف من صفر الفضاء الثنائي أي $\{0\}$ والثاني هو الفضاء V وهو

كلاً منهما يسمى فضاء خطي جزئي بديهي من V وتبعاً لذلك فكل فضاء خطي جزئي من V غير البديهي $\{0\}$ أي V فضاء خطي جزئي فعلي من V.

مثال: ليكن

$X = \{(0, a, b) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$ مجموعة جزئية من الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$، المطلوب برهان أن X الفضاء خطي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

$$\forall x = (0, a, b) \in X \ \& \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad x' = (0, a', b') \in X$$

و $a', b', a, b \in \mathbb{R}$

نفرض أن $\alpha x + \beta x' \in X$

لدينا $\alpha x + \beta x' = \alpha(0, a, b) + \beta(0, a', b') =$

$$= (0, \alpha a, \alpha b) + (0, \beta a', \beta b')$$

$$= (0, \underbrace{\alpha a + \beta a'}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{a b + \beta b'}_{\in \mathbb{R}}) \in X$$

$\in \mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}$

وبالتالي X فضاء خطي جزئي من الفضاء $\mathbb{R}^3$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف التركيب الخطي:

اذا كان V فضاء خطي فوق الحقل k عندئذ نقول ان المتجه x من V تركيب خطي للمتجهات $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ اذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists\, \alpha_i \in k \text{ و } x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \dots$$

$$= \sum_{i \in IN} \alpha_i x_i$$

اذا كانت i منتهية بحيث $i = 1, \dots, n$ عندئذ يصبح الشرط السابق

$$\exists\, \alpha_i \in k \text{ في } i = 1, 2, \dots, n \text{ ف } x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

تعريف: نقول عن المجموعة المتجهات $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ أنها مستقلة خطياً في V اذا تحقق الشرط التالي:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \iff \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

والا قلنا ان هذه المجموعة مرتبطة خطياً

تعريف: نقول عن مجموعة المتجهات $\{x_1, \dots, x_n\} = S$ من الفضاء الخطي V المعرف فوق الحقل k أنها معولدة للفضاء الخطي V اذا كان:

$$V = (S) \text{ ونكتب عندئذ } \forall x \in V : x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

* * * * * * * * * *

تعريف قاعدة الفضاء الخطي: نقول عن مجموعة المتجهات $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ من V أنها قاعدة للفضاء الخطي V اذا كانت تحقق الشرطان:

أ- مجموعة مستقلة خطياً من V.

2- مجموعة معولدة للفضاء V أي $V = (\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\})$

اذا كانت $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} =$ كقاعدة للفضاء الخطي V عندئذ فان أي متجه x من V يكتب بشكل وحيد كأي شكل تركيب خطي لعناصر القاعدة أي $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \dots$ اذا كانت قاعدة الفضاء الخطي V منتهية أي معلقة من n عنصراً عندئذ نقول

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إن الفضاء الخطي V منتهي البعد نكتب $\dim V = n < \infty$
↓ عدد عناصر القاعدة

$\dim$ يرمز لبعد الفضاء الخطي.

وبخلاف ذلك نقول أن الفضاء الخطي V غير منتهي البعد.

- أي فضاء خطي جزئي من فضاء منتهي البعد V بعده هو n يكون بعده أقل أو يساوي n وعكسه أن أي فضاء جزئي منتهي البعد.

- إذا كان الفضاء الخطي منتهي البعد بعده هو n أي $\dim V = n < \infty$ كذلك فإن أي مجموعة مؤلفة من $n+1$ عنصراً في V تكون مرتبطة خطياً.

- كذلك الفضاء خطي V منتهي البعد إن يكون له أكثر من القاعدة.

* * * * * *

الفضاءات المنظمة:

ليكن X فضاء خطي معرف فوق الحقل K نعرف كل تطبيق معرف بالشكل

$$\| \ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

والذي يحقق الشروط التالية:

1- $\forall x \in X \ ; \ \|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x \in X$.

2- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \ ; \ \alpha x \in K \ \& \ \forall x \in X$

3- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ ; \ \forall x, y \in X$

نظماً على X ونعرف الثنائي $(X, \| \ \|)$ وأقتصاراً X فضاءاً منظماً ويعرف $\|x\|$ بنظيم العنصر x حيث $x \in X$

ملاحظة: عندما يكون $K = \mathbb{R}$ نعرف X فضاء منظم حقيقي.

و $K = \mathbb{C}$ نعرف X فضاء منظم عقدي.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

العلاقة بين الفضاءات المنظمة والفضاءات المترية:

نظرية: كل فضاء منظم X هو فضاء متري تعطى مسافته بالعلاقة

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad ; \forall x,y \in X$$

البرهان:

$\forall x,y \in X \; , \; d(x,y) = \|x-y\|$ لنبرهن أنّ X فضاء متري

أي لنتحقق أنّ X تحقق شروط المسافة (الفضاء المتري)

① $d(x,y) \geq 0$

نلاحظ من تعريف d أنّ $d(x,y) \geq 0$ وذلك لأنّ x, y ينتميان إلى X

② $d(x,y) = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} x = y$

لدينا:

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

③ $d(x,y) = d(y,x) \; ; \forall x,y \in X$

لدينا $d(x,y) = \|x-y\| = |-1| \|y-x\| = \|y-x\|$

$= d(y,x) \; ; \forall x,y \in X$ خاصة نأخذ تحقق.

④ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \; ; \forall x,y,z \in X$

لدينا $d(x,y) = \|y-x\| = \|x-z+z-y\|$

$\leq \|x-z\| + \|z-y\|$

$\leq d(x,z) + d(z,y)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ومتراجحة المثلث محققة

نلاحظ من 1) و 2) و 3) أن الشروط الثلاث محققة، أن d معيارة على X

وبالتالي X فضاء متري.

***

ملاحظة: نعرف المسافة المحرّفة بالبرهنة السابقة بالمسافة المولدة عن النظيم.

ومما مر من النظرية السابقة أن كل فضاء منظم X هو فضاء متري مسافته تولد من العلاقة

$$d(x,y) = \|x-y\| \; ; \; \forall x,y \in X$$

والسؤال الذي يطرح نفسه: كيف؟

هل كل فضاء متري له مسافة مولدة من نظيم كيف؟

من الفرضية التالية نحصل على الجواب.

فرضية كاتيف في الانسياب: كل مسافة مولدة بالنظيم تعرف على فضاء منظم يجب أن تحقق الخاصتين التاليتين:

1) $d(x+3, y+3) = d(x,y) \; ; \; \forall x,y \in X$

2) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x,y) \; ; \; \forall \alpha \in K \; \& \; \forall x,y \in X$

البرهان: الخاصة الأولى:

1) $d(x+3, y+3) = \|x+3-(y+3)\|$

$= \|x+3-y-3\| = \|x-y\| = d(x,y)$

الخاصة الثانية:

$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\|$

$= |\alpha| \, d(x,y) \; ; \; \forall \alpha \in K \; \& \; \forall x,y \in X$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتيجة هامة في تطبيقات الحلية:

لكل جملة متر بي بالأعداد على توطئة سابقة لاحقة أحد خاصتي لاتغير من الأحيان تكون جملة غير معرفة بالنظم و الفضاء المتر بي المعرف عليه هذه الجملة لا يكون فضاء متقطعاً.

مثال على ذلك:

الفضاء المتر بي المتقطع و الفضاء المتتاليات S كلتي الجملة غير معرفة من نظم.

(دورة) * * * * * * * *

في الفضاء المنظم X جداً يتحقق الخاصتان:

أ: إذا كانت $x_n \to x$ و $y_n \to y$ حيث فإن: $x_n + y_n \to x + y$

2: إذا كانت $x_n \to x$ و $\lambda_n \to \lambda$ حيث فإن: $\lambda_n x_n \to \lambda x$

أي أن (أ) تعني أن العملية (+) مستمرة في الفضاء الخطي المنظم X.

و (2) تعني أن العملية (.) مستمرة في X.

البرهان: برهان أ: لنثبت أن $x_n + y_n \to x + y$ يعني أن نثبت أن $d(x_n + y_n, x + y) \to 0$ أي نفرض أن $n \to +\infty$

$$\| x_n + y_n - (x + y) \| \to 0$$

لدينا $0 \le \| (x_n + y_n) - (x + y) \| = \| (x_n - x) + (y_n - y) \|$

$$\le \| x_n - x \| + \| y_n - y \|$$

وبما أن المقدارات عن يمين المتراجحة سابقة عندما $n \to \infty$ نجد أن

$$\| (x_n + y_n) - (x + y) \| \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

وبالتالي $x_n + y_n - (x + y) \to 0$

$$\Rightarrow x_n + y_n \to x + y \quad (n \to +\infty)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهان (⇐) بما أن $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة إلى λ أي محدودة في $\mathbb{K}$

ومتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة ولدينا أيضاً:

$$0 \leq \|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\|$$

$$= \|\lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x\|$$

$$\leq \|\lambda_n (x_n - x)\| + \|(\lambda_n - \lambda)x\|$$

$$\leq |\lambda_n| \, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\|$$

حسب الخاصة في أطراف المتراجحة السابقة عندما $n \to +\infty$ نجد أن

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \to 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_x x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda x$$

* * * * * *

ملاحظة: بما أن كل فضاء منظم هو فضاء متري فإنه كل فضاء منظم جزئي هو فضاء متري جزئي. المفاهيم والمبرهنات المتعلقة بالفضاءات المترية تكون صحيحة في أجل الفضاءات المنظمة مثل تقارب المتتاليات - متتالية كوشي - الفضاءات التامة

فعلى سبيل المثال:

إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة في الفضاء المنظم X فإن (x_n) هي متقاربة في الفضاء المتري X (لأن كل فضاء منظم هو فضاء متري)

متتالية كوشي تقارب متتالية حدها:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) = N_0 \in \mathbb{N} \text{ و } \forall n \geq N_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

نهاية متتالية.

متتالية تصبح شرط تقارب متتالية:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) = N_0 \in \mathbb{N} \text{ و } \forall n \geq N_0 \Rightarrow$$

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

(x_n) متتالية متقاربة في X نهايتها x $\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: بما أن كل فضاء منظم هو فضاء خطي وسالي جميع المفاهيم والمبرهنات التي تكون صحيحة من أجل الفضاء الخطي تكون صحيحة من أجل الفضاء المنظم مثل قاعدة الفضاء الخطي، الفضاءات المنظمة المنتهية البعد الاستقلال والارتباط الخطي...)

****

The end.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z