كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي ١

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

الفضاءات التامة:

الفضاء التام: نقول عن الفضاء المتري $X=(X,d)$ أنه تام إذا كانت كل متتالية لكوشي في هذا الفضاء متقاربة فيه:

أي: $X=(X,d)$ فضاء متري تام إذا وفقط إذا:

$\forall (x_m)_{m\geq 1}$, $x_m\in X$, $m=1,2,\dots$

$(x_m)_{m\geq 1}$ لكوشي في فضاء X

$(x_m)_{m\geq 1}$ متقاربة في X

بعض الأمثلة والنماذج:

1) الفضاء المتري الحقيقي $(\mathbb{R},|\,|)$ هو فضاء تام لأن كل متتالية لكوشي متقاربة فيه (حسب نظرية سابقة) الشرط اللازم والكافي حتى تكون متتالية في $\mathbb{R}$ متقاربة هو أن تكون لكوشي في X.

وأيضاً لنفس السبب ونفس النظرية فإن الفضاء المتري العقدي $\mathbb{C}$ فضاء تاماً.

2) الفضاء المتري $X=(X,d)$ يكون فضاء غير تام إذا وجدت متتالية واحدة على الأقل لكوشي غير متقاربة في هذا الفضاء.

مثال: الفضاء المتري العادي $(\mathbb{Q},|\,|)$ المعرف على إضافة:

$d(x,y)=|x-y|$

فضاء غير تام لأن المتتالية التي حدها العام

$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ من نقاط الفضاء المتري $\mathbb{Q}$ هي لكوشي

في هذا الفضاء لأنه:

$$d(x_n, x_m) = d\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)$$

$$= \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right| \xrightarrow[n\to\infty,\ m\to\infty]{} 0$$

ولكن هذه المتتالية غير متقاربة في الفضاء Q لأن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \notin Q$$

إذاً وجدت متتالية لكوشي في Q غير متقاربة فيه.

إذاً Q غير تام.

لدينا أيضاً $([0,1[\,, |.|)$ مع المتتالية التي حدها العام $\frac{1}{n}$ هي متتالية لكوشي ولكنها ليست متقاربة. والفضاء هو فضاء غير تام.

3) الفضاء المتري الجزئي من فضاء متري تام ليس من الضروري أن يكون تاماً في الحالة العامة.

<u>مثال</u> الفضاء المتري الجزئي $(Q, |.|)$ من الفضاء المتري الحقيقي $(R, |.|)$ ليس فضاءً تاماً مع أن الفضاء المتري الحقيقي R تاماً

★ الفضاء المتري الجزئي التام:

وجدنا من مثال سابق أن الفضاء المتري الجزئي (Y, d) من فضاء متري تام (X, d) ليس من ضروري أن يكون فضاءً تاماً في الحالة العامة، والسؤال الذي يطرح نفسه: متى يصبح تاماً:

<u>الإجابة</u>: تكون من خلال نظرية التالية:

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء المتري الجزئي (Y, d) من فضاء متري تام (X, d) فضاءً تاماً هو أن تكون المجموعة Y مجموعة مغلقة في هذا الفضاء وهو (X, d).

مثال: الفضاء المتري الجزئي $([0,1], |\,|)$ من الفضاء المتري $(R, |\,|)$ التام الحقيقي هو فضاء تام لأن $[0,1]$ هي مجموعة مغلقة في $(R, |\,|)$.

حيث $[0,1] = [0,1]$ ،

بينما من المثال السابق وجدنا أنه الفضاء المتري الجزئي $(]0,1], |\,|)$ من الفضاء المتري الحقيقي $(R, |\,|)$ التام ليس فضاءً تاماً لأن $]0,1]$ مجموعة غير مغلقة في الفضاء $(R, |\,|)$.

مثال على الفضاء المتري التام:

أثبت أن الفضاء المتري (R^n, d) هو فضاء تام حيث:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$; \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in IR^n$$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in IR^n$$

الحل: دوماً لبرهان أن فضاءً مترياً هو فضاء تام نتبع الخطوات الآتية:

(1) نختار متتالية كيفية لكوشي من الفضاء المطلوب برهان أنه تام

(2) نبرهن أن هذه المتتالية متقاربة في هذا الفضاء.

(3) نبرهن أن نهاية المتتالية في 2 (والتي هي أساساً لكوشي) نقطة من هذا الفضاء.

نرجع لمثالنا:

نأخذ متتالية كيفية لكوشي في الفضاء المتري (IR^n, d)

ولتكن $(x)_{m \geq 1} = ((x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}))_{m \geq 1}$

ولنبرهن أنها متقاربة في الفضاء IR^n

بما أن $(x)_{m \geq 1}$ متتالية لكوشي في الفضاء IR^n وبالتالي فهي تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = N(\varepsilon) \in N$$

و $\forall m, r \geq N_0$

$$\Rightarrow d(x^{(m)}, x^{(r)}) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(r)})^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(r)})^2 < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow |x_i^{(m)} - x_i^{(r)}| < \varepsilon$$

ف $i = 1, \dots, n$,

& $\forall m, r \geq N_0$

الآن من أجل i مثبتة فإن الشرط التالي محقق :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

$, \forall m, r \geq N_0$

$$\Rightarrow |x_i^{(m)} - x_i^{(r)}| < \varepsilon$$

ف $i = 1, 2, \dots, n$.

أي أن المتتالية الحقيقية

$$(x_i^{(m)})_{m \geq 1} = \{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}\}$$

حيث $i = 1, 2, \dots, n$:

هي متتالية لكوشي في الفضاء الحقيقي $(\mathbb{R}, |\ |)$ لأنها تحقق شرط كوشي وبما أن $(\mathbb{R}, |\ |)$ فضاءً تاماً وبالتالي فإنها متقاربة في $\mathbb{R}$

أي أن :

$$\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i$$

حيث $x_i \in IR$ من أجل
$i = 1, \dots, n$

وبتالي فإن:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in IR^n$$

بقي علينا أن نثبت أن:

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$$

نجعل $m \to r$ في المتراجحة:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(x^{(m)}, x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(x^{(m)}, x) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$$

وجدنا أن (x^m) متتالية كيفية لكوشي في الفضاء (IR^n) متقاربة إلى النقطة x من الفضاء IR^n وبتالي هذا الفضاء هو فضاء تام.

* *

الفضاءات غير التامة:

أمثلة:

الفضاء العادي $(Q, |\,|)$ أيضاً فضاء الحدوديات (بعض بالعمل).

أمثلة عن الفضاءات التامة:

الفضاء الحقيقي IR , IR^n , $\mathbb{C}$, l^p , l^∞ , $C[a,b]$

إذاً الفضاءات المترية تقسم كما رأينا إلى فضاءات تامة وفضاءات غير تامة. ويمكننا لأي فضاء متري غير تام توسيعه حتى يصبح تاماً.

وتدعى هذه العملية بعملية اتمام الفضاءات المترية (انظر مجال

ملاحظة هامة : إن الفضاء المتري يمكن أن يكون تاماً بالنسبة لمسافة

(متري) d معرف عليه ومن الممكن أن لا يكون تاماً بالنسبة لمسافة أخرى

(متري آخر) معرف عليه $\tilde{d}$.

مثال: إن الفضاء $C[a,b]$ هو فضاء متري مع المسافة d المعرفة عليه

بالشكل:

$$d(x,y) = \max |x(t) - y(t)|$$

$$\forall x = x(t) \in C[a,b] ;$$

$$y = y(t) \in C[a,b] ;$$

$$\& \quad a \leq t \leq b$$

وهو فضاء متري تام بالنسبة لـ d أي : $(C[a,b], d)$ فضاء متري

تام. (يبرهن بالعملي)

ولكن نفس الفضاء $C[a,b]$.

فضاء متري مع المسافة $\tilde{d}$ المعرفة عليه بالشكل:

$$\tilde{d}(x,y) = \int |x(t) - y(t)| \, dt$$

$$\forall x = x(t) \in C[a,b] ;$$

$$y = y(t) \in C[a,b] .$$

وهو فضاء متري غير تام :

أي : $(C[a,b], \tilde{d})$ فضاء غير تام (يبرهن بالعملي)

* الفضاءات المنظمة - فضاءات باناخ -

تذكرة ببعض معلومات الجبر الخطي :

- الفراغ الشعاعي (المتجهي - الخطي)

إذا كانت V مجموعة ما غير خالية:

أي $V \neq \emptyset$ و K حقل ما.

نقول إن V فراغاً شعاعياً.

(فضاء شعاعياً) (فضاء خطياً) (فضاء متريا).

فوق الحقل K بالنسبة للعمليتان الأولى (+) داخلية معرفة بالشكل

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\forall x, y \in V : x + y \in V$$

والعملية الثانية خارجية وهي (.) عملية ضرب معرفة بالشكل التالي على V.

$$K \times V \longrightarrow V$$

$$(\alpha . x) \longrightarrow \alpha . x \in V$$

أو $\forall \alpha \in K \ \& \ x \in V$ في $\alpha \cdot x \in V$

إذا تحققت الشروط التالية:

* $(V, +)$ زمرة تبديلية أي:

P- + تبديلي على عناصر V.

$$\forall x, y \in V : x + y = y + x$$

ب- + مغلقة على عناصر V

$$\forall x, y \in V : x + y \in V$$

جـ- + تجميعي على عناصر V

$$\forall x, y, z \in V \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$$

د- يوجد عنصر حيادي بالنسبة لـ (+) في V وهو الشعاع الصفري 0

يحقق ما يلي:

$$0 \in V \ \& \ \forall x \in V : x + 0 = x$$

$$0 + x = x$$

- يوجد لكل عنصر x من V النظير وهو $(-x)$ في V بالنسبة لـ $(+)$

بحيث يكون: $(-x) \in V$

$$(-x) + x = 0$$

$$x + (-x) = 0$$

* أن عملية الضرب $(\cdot)$ تحقق ما يلي:

① $\forall \alpha \in K \ \& \ \forall x, y \in V$

$$\alpha (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$$

② $\forall \alpha, \beta \in K \ \& \ \forall x \in V$

$$\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$$

③ $\forall \alpha, \beta \in K \ \& \ \forall x \in V$

$$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$$

④ $\forall x \in V$

$$1_K . x = x$$

حيث 1_K هو واحدة الضرب في الحقل K.

- K حقل العاملات العددية (السلمية)

ندعو الحقل K الحقل العددي أو حقل العاملات للفضاء المتجهي V

وندعو عناصر الحقل العددي K معاملات عددية أو مقادير سلمية ونرمز لها

بأحرف صغيرة مثل: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

أما الفضاء الشعاعي (المتجهي) فنرمز له بأحرف كبيرة مثل:

$X, Y, Z, \dots$

وندعو عناصر الفضاء الشعاعي أشعة أو متجهات ونرمز لعناصره

بأحرف لاتينية صغيرة مثل: $x, y, z, \dots$

ونصطلح على أن الرمز o هو المتجه الصفري أو الشعاع الصفري

(واحدة الجمعي V) في الفضاء V .

وبالرمز 0_K لواحدة الجمعي الحقل K وإذا لم يوجد أي التباس بينهما نرمز لكليهما 0 .

ملاحظة :

في الفضاء الخطي دوماً لدينا العمليات التالية محققة :

1.) $\underset{\text{الحقل}}{0} \cdot x = \underset{\text{الفضاء}}{0}$; $\forall x \in V$.

2.) $\alpha \cdot \underset{\text{الفضاء}}{0} = \underset{\text{الفضاء}}{0}$; $\forall \alpha \in K$.

3.) $(-1)(x) = -x$; $\forall x \in V$

و (-1) هو عنصر من K .

ملاحظة :

عندما $K = IR$ عندئذ ، ندعو V فضاء شعاعي حقيقي (خطي)

عندما $K = C$ عندئذ ، ندعو V فضاء شعاعي عقدي (خطي) .

The End .

انتهت المحاضرة .