كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

نظرية المتتالية المتقاربة وخواصها:

نظرية: إذا كان $X=(X,d)$ فضاء متري عندئذ فإن:

1- كل متتالية متقاربة في X محدودة ونهايتها وحيدة.

2) إذا كانت $x_n \to x$ و $y_n \to y$ متتاليات متقاربة في الفضاء المتري X.

هذه البرهنة تم برهانها في محاضرة الأسبوع الماضي

عندئذ فإن: $\lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$

برهان 1- أولاً: سنبرهن أن كل متتالية متقاربة في X محدودة. من أجل ذلك لنأخذ $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية كيفية من نقاط الفضاء المتري X متقاربة نحو النقطة $x\in X$ في الفضاء X. لنبرهن أن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة.

علماً أن: $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$

بما أن $(x_n)_{n\geq 1}$ حققت الشرط التالي

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} = N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \; / \; \forall n \geq N_0 \Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon$$

نضع $\varepsilon = 1$ حيث أن N_0 هو عدد المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ حواد من كرة مركزها x ونصف قطرها 1 أي $B(x,1)$ عدا عدد محدد من حدود هذه المتتالية

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}$

نضع: $a = \max\{d(x_1,x), d(x_2,x), \ldots, d(x_{N_0-1},x)\}$

عندئذٍ: نأن جميع حدود المتالية $(X_n)_{n\geq 1}$ تقع ضمن كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها $1+a$ حيث $a>0$

$$d(X_n, x) < 1+a \; ; \; n=1,2,\dots$$

أي أن المتالية $(X_n)_{n\geq 1}$ محدودة.

برهان 2: ثانياً: لنبرهن أن نهاية المتالية المتقاربة وحيدة في X من أجل ذلك نأخذ $(X_n)_{n\geq 1}$ متالية متقاربة في X ولنفرض أن لـ $(X_n)_{n\geq 1}$ نهايتان أي:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \quad \text{و} \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

$$\Leftrightarrow \left(d(X_n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \wedge d(X_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right)$$ بما أن

x, y, X_n نقط من الفضاء المتري X إذاً متراجحة المثلث محققة وهي:

$$0 \leq d(x,y) \leq d(x, X_n) + d(X_n, y)$$

نأخذ النهاية من أجل المتراجحة السابقة عندما

$n \longrightarrow \infty$ نجد أن

$$\lim_{x\to+\infty} d(x,y) = 0$$

$d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ نهاية متالية متقاربة وحيدة.

الشرط اللازم والكافي حتى تكون M مجموعة مغلقة هو أن تكون نهاية أية متالية متقاربة من نقط المجموعة M نقطة من M بكلمات رياضية:

M مغلقة $\Leftrightarrow$

$$\forall (X_n)_{n\geq 1} \; ; \; X_n \in M \; , \; n=1,2,3,\dots$$

$$\text{if } X_n \to x \text{ then } x \in M$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: في الفضاء المتري الحقيقي:

$(\mathbb{R}, |.|)$ لتكن $M \in]0,1[\subset \mathbb{R}$ عندئذ فإن المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{1}{n}$ هي متتالية من نقط المجموعة M لأن:

$$(x_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$$

$$= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

و $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

متتاليات كوشي:

تعريف متتالية كوشي: نقول عن متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من نقط الفضاء المتري $X=(X,d)$ أنها متتالية كوشي إن حققت الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ ؛}$$

$$\forall n,m \geq N_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

نتيجة: إذا كانت $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي في الفضاء المتري $X=(X,d)$ عندئذ فإن $\lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} d(x_n, x_m) = 0$

خواص متتالية كوشي:

نظرية: إذا كان $X=(X,d)$ فضاء متري عندئذ:

أ) كل متتالية متقاربة في الفضاء X تكون لكوشي.

ب) كل متتالية لكوشي في X هي متتالية محدودة.

تطبيق: لتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية كيفية متقاربة من نقط الفضاء المتري X حيث

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$ أي أن

لنبرهن $(x_n)_{n\geq 1}$ لكوشي في هذا الفضاء علماً أن x_m, x_n, x_1

نلاحظ مما سبق من الفضاء المتري X وبالتالي فإن المتراجحة التالية محققة

$$0 \leq d(x_n, x_m) \leq d(x_m, n) + d(x, x_m)$$

نأخذ النهاية عندما n و m تؤول إلى المتراجحة السابقة عندما

$m \to +\infty$ في $n \to \infty$ كي أن

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to\infty}} d(x_n, x_m) = 0$$

وبالتالي $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية لكوشي في الفضاء X

نتيجة التأكيد: $(x_n)_{n\geq 1}$ لكوشي في الفضاء المتري $X \Leftrightarrow \lim_{\substack{n\to 0 \\ m\to 0}} d(x_n, x_m) = 0$

بعض النتائج والملاحظات:

1- عكس المبرهنة السابقة أيضاً ليس صحيح بالحالة العامة أي أن ليست كل متتالية لكوشي في فضاء متري هي متتالية متقاربة من هذا الفضاء في الحالة العامة.

مثال:

أخذنا المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من نقط الفضاء المتري $(\mathbb{Q}, |\ |)$ والتي حدها العام

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

هي متتالية كوشي في هذا الفضاء لأن:

$$d(x_n, x_m) = d\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)$$

$$= \left|\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - \left(1+\frac{1}{m}\right)^n\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

($\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \to e$ و $\left(1+\frac{1}{m}\right)^n \to e$)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ولكن هذه متتالية ~~[illegible]~~ غير متقاربة في الفضاء المتري $(\mathbb{Q}, d)$ لأنه

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \notin \mathbb{Q}$$

2) إن عكس الملاحظة السابقة غالباً ليس صحيح في الحالة العامة أي أنه ليست كل متتالية محدودة في فضاء متري X أن تكون كوشي في هذا الفضار في الحالة العامة.

مثال: أخذنا في الفضاء المتري $(\mathbb{R}, d)$ المتتالية التي حدها العام $x_n = (-1)^n$ وهي متتالية محدودة في الفضاء $\mathbb{R}$ لأن مجموعة قيم حدودها $\{-1, 1\}$ محدودة ولكنها ليست كوشي لأنه:

$$d(x_n, x_m) = d\left((-1)^n, (-1)^m\right) =$$

$$\left|(-1)^n - (-1)^m\right| \xrightarrow[m\to+\infty]{n\to+\infty} 2 \neq 0$$

(n زوجي ← ، m فردي)

برهان الملاحظة رقم 2 من بداية المحاضرة:

المعطيات: $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ و $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

بما أن: $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ ، $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$

سنثبت على توالي أن: $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} d(y_n, y) = 0$

بما أن x, y, x_n, y_n نقط من الفضاء المتري X سيتالي المتراجحة المثلثية تحقق:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$d(x_n,y_n) \le d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{d(x_n,y_n) - d(x,y) \le d(x_n,x) + d(y,y_n)} \quad \text{(I)}$$

أيضاً x,y ، x_n,y_n نقط من الفضاء المتري X إذاً المتراجحة المثلثية تحقق:

$$d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y)$$

أي

$$d(x,y) - d(x_n,y_n) \le d(x,x_n) + d(y_n,y)$$

نضرب طرفي المتراجحة السابقة بـ (-1) فنجد أن:

$$\boxed{-\big(d(x,x_n) + d(y_n,y)\big) \le d(x_n,y_n) - d(x,y)} \quad \text{(II)}$$

بمقارنة (I) و (II) نجد أن:

$$-d(x,x_n) + d(y_n,y) \le d(x_n,y_n) - d(x,y) \le d(x,x_n) + d(y_n,y)$$

وبالتالي:

$$0 \le \big|d(x_n,y_n) - d(x,y)\big| \le d(x,x_n) + d(y_n,y)$$

وبأخذ النهاية عند أطراف المتراجحة السابقة عندما $n \to +\infty$ نجد أن:

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_n) - d(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لتكن $X=(X,d)$ فضاءاً متريّاً حيث $X \neq \emptyset$ عندئذٍ فإن

① الشرط اللازم والكافي حتى تكون $x \in \bar{M}$ هو أن توجد متتالية من نقاط المجموعة

M وهي $(x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو x.

بكلام رياضي:

$$x \in \bar{M} \iff \exists (x_n)_{n\geq 1} \text{ نحو } x$$

$$x_n \in M, n=1,2,\ldots \;\&\; x_n \to x$$

أثبت الخاصة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة