كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي ١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

بعض المفاهيم التبولوجية الأساسية:

الكرة والقشرة الأرضية:

الكرة المفتوحة: $X = (X, d)$ فضاء متري وكان: $r \in R^+$ و $x_0 \in X$

الكرة المفتوحة:

$$B(x_0, r) = \{y \in X ; d(x_0, y) < r\}$$

الكرة المغلقة:

$$\bar{B}(x_0, r) = \{y \in X , d(x_0, y) \leq r\}$$

القشرة الكروية:

$$S(x_0, r) = \{y \in X ; d(x, x_0) = r\}$$

الكرة المفتوحة والمغلقة والقشرة الكروية:

إسقاط كل منها في الفضاءات المترية التي تعرفنا عليها مثل:

$R^n$ و $R$ و $C$ و $l^\infty$ و $l^\infty$ و

$C[a, b]$

الجوار: لتكن $(X, d)$ و $X$ فضاءً مترياً و $x_0 \in X$ نقطة من هذا الفضاء وندعو كل كرة مفتوحة مركزها $x_0$ ونصف قطرها $\varepsilon$ حيث $\varepsilon > 0$ الجوار $\varepsilon$ للنقطة $x_0$ أو جواراً للنقطة $x_0$ وندعو أي مجموعة جزئية $M$ وكانت تحتوي كرة مفتوحة مركزها النقطة $x_0$ لأنه تحوي جواراً له $x_0$.

* المجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة:

ندعو المجموعة الجزئية M من الفضاء المتري $X=(X,d)$ $(X\supseteq M)$ مجموعة مفتوحة إذا وجدت من أجل كل نقطة من نقاطها كرة مفتوحة مركزها هذه النقطة، أي من أجل M مجموعة مفتوحة في X إذا تحقق أنه من أجل كل من نقاط المجموعة M توجد كرة مفتوحة مركزها هذه النقطة محتواة بالكامل في المجموعة M.

وندعو A مجموعة مغلقة $X\supseteq A$ إذا كانت $X-A=\bar{A}$ مجموعة مفتوحة في X

* النقطة الداخلية:

ليكن $X=(X,d)$ فضاءً مترياً و M مجموعة جزئية منه $M\subseteq X$ و $x_0\in X$

ندعو النقطة $x_0$ نقطة داخلية للمجموعة M إذا كانت M جواراً للنقطة $x_0$ أو إذا كانت نقطة M جواراً للنقطة $x_0$ أو إذا وجد جوار للنقطة $x_0$ محتواة بالكامل في M.

$x_0$ نقطة داخلية لـ M $\Longleftrightarrow \exists B(x_0,\varepsilon)$ أو $B(x_0,\varepsilon)\subset M$

$M_0\subseteq M$

نرمز لجميع النقط الداخلية للمجموعة M بالرمز $M^\circ$ ينتج من تعريف السابق أن

1) $x_0\in M$ و $M^\circ\subseteq N$

2) المجموعة $M^\circ$ مجموعة مفتوحة لأنه من أجل كل نقطة من نقاطها توجد كرة مفتوحة مركزها هذه النقطة محتواة بالكامل في المجموعة $M^\circ$ وهي أكبر مجموعة مفتوحة في M.

نقطة التراكم والنقطة اللاصقة:

لتكن $X=(X,d)$ فضاءً مترياً و $N\subseteq X$ مجموعة جزئية من هذا الفضاء ولكن $x_0$ و $x_0'$ تنتميان من هذا الفضاء عندئذ:

1) ندعو النقطة $x_0\in X$ نقطة تراكم للمجموعة M إذا كانت أي جوار مركزه هذه النقطة تقاطعه مع المجموعة M باستثناء النقطة $x_0$ لا يساوي الخالية أي:


TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

و $B(x_0, r)$ و $\forall r > 0$

$B(x_0, r) \cap M - \{x_0\} \neq \emptyset$

أي أن كل جوار النقطة $x_0$ يحوي عدد غير منتهي من نقط المجموعة M

((أي أن كل جوار النقطة $x_0$ يحوي نقطة واحدة على الأقل من المجموعة مغايرة للنقطة $x_0$))

نرمز عادة لمجموعة جميع نقط تراكم المجموعة M بالرمز $M'$ ونعرفها المجموعة المشتقة

أيضاً $x_0$ نقطة تراكم لـ M و $x_0$ يمكن أن تكون نقطة M، يمكن أن لا تكون

(٣) ندعو النقطة $x_0 \in X$ نقطة لاصقة للمجموعة M إذا كان كل جوار النقطة $x_0$ يحوي نقطة واحدة على الأقل من M

((أي أن تقاطعه مع M غير خال)) ويشكل رياضي نكتب:

$\forall \varepsilon > 0 , B(x_0, \varepsilon) \cap M \neq \phi$

وتدعى مجموعة جميع النقط اللاصقة M ونرمز لها بالرمز $\bar{M}$

حيث $\bar{M} = M' \cup M$ أي أن $M \subseteq \bar{M}$ و $\bar{M}$ هي مجموعة مغلقة.

نتيجة:

$M \subseteq X$، $X$ فضاء متري مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت $M = \bar{M}$

قطر المجموعة أو المجموعات المحدودة:

نرمز لقطر مجموعة ما خالية M الفضاء المتري

$X = (X, d)$ بالرمز $S(M)$

ومعرفة وفق العلاقة:

$S(M) = \sup d(x, y)$

$x \in M \quad , \quad y \in M$

فتكون M المجموعة محدودة إذا كان:

$S(M) < \infty$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ويمكننا تعريف المجموعة المحددة بالشكل التالي:

نقول عن $X=(x,d)$ فضاء متري ، $M \subseteq X$ انها محدودة اذا كانت جميع نقاط المجموعة $M$ محتواة ضمن كرة مغلقة او مفتوحة اذ كان بالإمكان إعادة كرة (مفتوحة) تحصر جميع نقاط هذه المجموعة

إن الفضاء التبولوجي ما هو إلا تعميم للفضاء المتري وجميع المفاهيم الواردة في الفضاءات المترية الصحيحة من أجل الفضاءات التبولوجية.

* المتتاليات *

تعريف المتتالية في الفضاء المتري:

ليكن $X=(x,d)$ فضاءً متريًا ، ندعو كل دالة $X \leftarrow N : u$

معرفة بالشكل التالي:

$1 \to u(1) = x_1$

$2 \to u(2) = x_2$

$n \to u(n) = x_n$

$u(n) = x_n$ ف $\forall n \in N$

متتالية في الفضاء المتري $X$ وندعو $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

بحدود هذه المتتالية و

$\{u(1), u(2), \ldots, u(n), \ldots\}$

مجموعة حدود المتتالية:

$\{x_1, x_2, x_n \ldots\}$

ونرمز لهذه المتتالية بالرمز:

$(x_n)_{n \geq 1}$ ، $x_1$ حدها الأول.

و $x_n$ حدها العام



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال عن المتتاليه في الفضاء المتري X

المتتالية الذي حدها العام

$x_n = \left(\frac{1}{n}, (1+\frac{1}{n})^n, e^{-n}\right)$

متتالية من نقط الفضاء المتري $\mathbb{R}^3$

* المتتالية المتقاربة :

ليكن $X = (X, d)$ فضاء متريًا و $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من نقط هذا الفضاء

نقول عن هذه المتتالية انها متقاربة من النقطة $x \in X$ إذا تحقق الشرط

التالي :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ؛

$\forall n \geq N_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$

وفي هذه الحاله نكتب ونقول ان النقطة X هي نهاية المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$

في الفضاء المتري X ونكتب :

او : $x_n \to x$

$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$

وإذا لم يتحقق هذا الشرط قلنا

المتتاليه $(x_n)_{n\geq 1}$ انها متباعدة في الفضاء المتري X او متباعدة فقط

* بعض الملاحظات والنتائج :

أولاً : اذا طبقنا شرط المتتاليه المتقاربة في الفضاء المتري الحقيقي $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

فنحصل على شرط المتتاليات العددية الحقيقية المتقاربة في $\mathbb{R}$ وهو :

* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) = N_0 \in \mathbb{N}$ ؛

$\forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

حيث :

$\lim_{x \to +\infty} x_n = x$

وظيفة: أسقط شرط المتتالية المتقاربة على المتتاليات في كل من الفضاءات المترية:

$$(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}, C[a,b], \ell^p, \ldots)$$

نتيجة 2: إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ عندئذٍ جميع حدود هذه المتتالية تقع ضمن كرة مفتوحة مركزها $x$ ونصف قطرها $\varepsilon$ حيث $\varepsilon>0$، ويمكن أن نكتب:

$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \iff$ تحقق شرط (*) جميع حدود المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تقع ضمن كرة مفتوحة مركزها $x$ ونصف قطرها $\varepsilon$ حيث $\varepsilon>0$

نتيجة 3: $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x)$

مثال: المتتالية التي حدها العام $x_n = \left(1+\frac1n\right)^n, e^{-n}$ متتالية من نقاط الفضاء المتري $\mathbb{R}^3$ من أجل $n=1,2,\ldots$ وهي متقاربة من النقطة $x=(0,e,0)\in\mathbb{R}^3$ لأن:

$$d(x_n,x) = d\left(\left(\frac1n, \left(1+\frac1n\right)^n, e^{-n}\right), (0,e,0)\right)$$

$$= \sqrt{\left(\frac1n-0\right)^2 + \left(\left(1+\frac1n\right)^n-e\right)^2 + \left(e^{-n}-0\right)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

نتيجة: إذا كانت $(x_n)_{n\geq1}$ متتالية من نقاط الفضاء المتري $X=(X,d)$ وكانت هذه المتتالية غير متقاربة إلى أي نقطة من هذا الفضاء أو متقاربة إلى نقطة $x_0$ و $x_0 \notin X$ عندئذٍ نقول عن هذه المتتالية متباعدة وبالتالي تقارب المتتالية يتعلق بطبيعة هذه المتتالية والفضاء المتري معاً.

مثال: المتتالية:

$$(x_n)_{n\geq1} = \left(\frac1n\right)_{n\geq1}$$

$$\left\{1, \frac12, \frac13, \ldots, \frac1n, \ldots\right\}$$

متتالية من نقط الفضاء المتري الحقيقي $(\mathbb{R},|\,|)=\mathbb{R}$

وهي متتالية متقاربة من النقطة $0\in\mathbb{R}$

ولكن هذه المتتالية غير متقاربة في الفضاء المتري الجزئي

$(]0,1],|\,|)$

والمحتوى في $\mathbb{R}$ لأنه:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\notin]0,1]$$

على الرغم من أن هذه المتتالية من نقط الفضاء المتري الجزئي:

$(]0,1],|\,|)$

نتيجة هامة: من المثال السابق المتتالية المتقاربة في الفضاء المتري ليست من الضروري أن تكون متقاربة في كل فضاء متري جزئي فيه.

ما

* المتتالية المحدودة *

نقول عن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ من نقط الفضاء المتري $X=(X,d)$ إنها محدودة في هذا الفضاء إذا كانت مجموعة حدودها محدودة ضمن كرة مفتوحة

مثال:

في الفضاء المتري الحقيقي: $(\mathbb{R},|\,|)$ فإن المتتالية التي حدها العام $x_n=\frac{1}{n}$ من نقط هذا الفضاء هي متتالية محدودة

لأنه يوجد كرة مفتوحة مركزها تحوي جميع حدود هذه المتتالية

$$0\leq\frac{1}{n}\leq1$$

"انتهت"