كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : العاشرة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

* مسائل القيم الحدية: مسألة القيم الحدية من المرتبة الثانية:

يعطى الشكل العام لهذه المسألة كالتالي:

$$y' = f(t, y, y') \quad \text{---} (1)$$

$$y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta \quad \text{---} (2)$$

تدعى مسألة القيم الحدية لأن الحل معدوم عند طرفي المجال وهو ما يدعى بالشروط الحدية.

- يكون المسألة 1) و 2) حلاً وحيداً (أي وحيد) إذا حقق هذا الحل $y(t)$ المعادلة التفاضلية 1) مع الشروط الحدية 2).

* مبرهنة الوجود والوحدانية:

لتكن لدينا المنطقة: $D = \{(t, y, y') \mid a \le t \le b$ و

$$\left.\begin{array}{l} -\infty < y < +\infty \\ -\infty < y' < +\infty \end{array}\right\}$$

يكون للمسألة (1, 2) حلاً وحيداً يُرمز $y(t)$ إذا تحقق التالي:

1- $f(t, y, y')$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ مستمرة على D.

2- إذا كان $\dfrac{\partial f}{\partial y} > 0$ ؛ $\forall (t, y, y') \in D$

و $\forall (t, y, y) \in D$

3- إذا وجد عدد حقيقي M بحيث يكون:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < M \; ; \; \forall (t, y, y') \in D$$

- نميز حالتين:

الحالة الأولى: ستكون الدالة f خطية وعندئذٍ تكتب مسألة القيم الحدية بالشكل:

$$y'' = p(t)\,y' + q(t)\,y + r(t) \quad \text{---} (3)$$

$$y(a) = \alpha, \; y(b) = \beta \quad \text{---} (4)$$

- إذا كانت الدالة f غير خطية من y أو y' عندئذٍ نأخذ الشكل (1) و (2).

- سنركز أولاً على إيجاد الحلول العددية للحالة الخطية:

مثال: على إيجاد حل وحيد لمسألة القيم الحدية:

$$y'' + e^{-ty} + \sin y' = 0$$

$$y(1) = y(2) = 0$$

$$t \in [1, 2]$$

أثبت وجود حل وحيد.

الحل:

$$f(t, y, y') = -e^{-ty} - \sin y'$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = t e^{-ty} > 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |-\cos y'| \leq M = 1$$

f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ مستمرة على $\mathbb{R}$

نضع مستمرة على أي مجال مغلق منه أي على:

$$D = \{(t, y, y') \mid 1 \leq t \leq 2 \text{ و } -\infty < y, y' < +\infty\}$$

* إنّ إيجاد الحلول العددية لمسائل القيم الحدّية باستخدام الطرائق المعروفة (أويلر - منشور تايلور - رانج كوتا) غير ممكن مباشرة بسبب الشروط الحدية لهذه المسألة.

- نوضح طرائق خاصة لكل هذه المسألة أهمّها:

طريقة القذيفة: Shooting

كوّل هذه الطريقة مسألتنا إلى مسألتين من مسائل القيم الابتدائية:

نفرض أنّ $w(t)$ هو الحل الوحيد للمسألة الأولى و $z(t)$ هو الحل الوحيد للمسألة الثانية

- مسألة القيم الابتدائية الأولى:

$$\begin{cases} w'' = p(t)w' + q(t)w + r(t) \\ w(a) = \alpha \quad , \quad w'(a) = 0 \quad ; \quad t \in [a, b] \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مسألة القيم الابتدائية الخطية (الحدية):

$$\begin{cases} z'' = p(t)\,z' + q(t)\,z \\ z(a) = 0 \;,\; z'(a) = 1 \;;\; t \in [a,b] \end{cases}$$

عند تحقق حلّ المسألة الأساسية الخطية (3) و(4)

$y(t)$ هو تركيب خطي

كل المسألة المركب خطياً من $w(t)$ و $z(t)$ ،

$$y(t) = w(t) + c\,z(t) \quad \text{---} \quad (5)$$

عشوائية تطلب تعيينه في

- لإثبات (5) هو حل وحيد للمسألة الأساسية:

نفرض $y'(t) = w'(t) + c z'(t)$

$$\longrightarrow y' = w' + c z'$$

$$y''(t) = w''(t) + c z''(t)$$

$$\longrightarrow \underline{y'' = w'' + c z''}$$

نعوّض في المسألة الأولى: بعد التعويض نجد:

$$y'' = p(t)\,w' + q(t)\,w + r(t) + c z''$$

$$= p(t)\,w' + q(t)\,w + r(t)$$

$$+ c\,(p(t)\,z' + q(t)\,z)$$

$$= p(t)\,[w' + c z'] + q(t)\,[w + c z] + r(t)$$

$$\Rightarrow y'' = p(t)\,y' + q(t)\,y + r(t)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

يجب على $y(t)$ أن تحقق الشروط الكتلية :

$$y(a) = w(a) + c\,z(a) \quad (1)$$

و $w(a) = \alpha$ و $z(a) = 0$

$$\Rightarrow y(a) = \alpha$$

$$y(b) = w(b) + c\,z(b) = \beta \quad (2)$$

يكون هذا الشرط محقق عندما

$$c = \frac{\beta - w(b)}{z(b)}$$

وعند التعويض في (5) :

$$\Rightarrow y(t) = w(t) + \frac{\beta - w(b)}{z(b)}\, z(t)$$

* خوارزمية الحل المسألة (3-4) :

1- تحويل المسألة ذات القيم الكتلية إلى مسألتي قيم ابتدائية .

2- نطبق الطرائق الأساسية التي درسنا على كل المسألتين الأولى والثانية

على قيم ابتدائية كيفية يكون

$w_1, \dots, w_n$ حل للمسألة الأولى .

و $z_1, \dots, z_n$ حل للمسألة الثانية .

3- نحدد الثابت $c = \frac{\beta - w(b)}{z(b)}$

و $w(b) = w_n$

$z(b) = z_n$

TEL:0931497960 - Facebook Group : A to Z مكتبة

4- $y_i = w_i + c\,\beta_i$

$$y_i = w_i + \frac{\beta - w_n}{\beta_n}\,\beta_i$$

$; 1 \le i \le n$

حيث n خزنة للعمال $t_i = t_0 + hi$

$; h = \frac{b-a}{n}$

مثال: استخدم طريقة القذيفة مع طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل المسألة

$$y' = y - y^1 + e^t$$

$; y(0) = 1, y(0,3) = e^{0.3}$

$t \in [0, 0.3]$

خطوة: $h = 0.1$

واجب الخطأ المطلق في الحل العددي علماً أنه $y(t) = e^t$

الحل: حل المسألة بطريقة القذيفة إلى مسألتين من حساب العلم الإبتدائية.

(1) المسألة الأولى:

$$\begin{cases} w'' = w - w' + e^t \\ w(0) = 1 \; ; \; w'(0) = 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(1) المعادلة التفاضلية:

$$z'' = z - z'$$

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = 1$$

(2) حل المعادلة الأولى باستخدام رانج كوتا:

$$\begin{cases} w' = u \equiv f_1(t, w, u) \\ u' = w - u + e^t \equiv f_2(t, w, u) \\ w(0) = 1, \quad u(0) = 0 \end{cases}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{2}[l_1 + l_2]$$

$$n = \frac{0.3 - 0}{0.1} = 3 \quad ; \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

$\boxed{i = 0}$

$$w_1 = w_0 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$

$$u_1 = u_0 + \frac{1}{2}[l_1 + l_2]$$

$$k_1 = h f_1(t_0, w_0, u_0) = h u_0 = 0$$

$$l_1 = h f_2(t_0, w_0, u_0) =$$

$$h(w_0 - u_0 + e^{t_0}) = 0.1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$k_2 = h f_1(t_0 + h, w_0 + k_1, v_0 + l_1)$$
$$= h(v_0 + l_1) = 0.02$$

$$l_2 = h f_2(t_0 + h, w_0 + k_1, v_0 + l_1)$$
$$= h(w_0 + k_1 - v_0 - l_1 + e^{t_0+h})$$
$$= 0.190517$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = 1 + \frac{1}{2}[0 + 0.02] \\ \quad = 1.01 \\ v_1 = 0 + \frac{1}{2}[0.2 + 0.190517] \\ \quad = 0.195259 \end{cases}$$

متابع بنفس الأسلوب نحصل على:

$$\begin{cases} w_2 = 1.03919 \quad ; t_2 = 0.2 \\ v_2 = 0.384438 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_3 = 1.08695 \quad ; t_3 = 0.3 \\ v_3 = 0.571012 \end{cases}$$

(*) حل المسألة الثانية:

$$\begin{cases} z' = v \equiv f_1(t, z, v) \\ z'' = v' = z - v \equiv f_2(t, z, v) \\ z(0) = 0 \ , \ v(0) = 1 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2}[l_1 + l_2]$$

و $i = 0, 1, \ldots, n$

$i = 0$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$
$$v_1 = v_0 + \frac{1}{2}[l_1 + l_2]$$

$$k_1 = h f_1 = h v_0 = 0.1$$
$$l_1 = h f_2 = h(z_0 - v_0) = -0.1$$
$$k_2 = h(v_0 + l_1) = 0.09$$
$$l_2 = h((z_0 + k_1) - (v_0 + l_1))$$
$$= -0.08$$

$z_1 = 0.095$; $t_1 = 0.1$

$v_1 = 0.91$

نتابع بنفس الأسلوب نحصل على:

$k_1 = 0.091$

$l_1 = -0.0815$

$k_2 = 0.08285$

$l_2 = -0.06425$

$\Rightarrow \begin{cases} z_2 = 0.181925 \text{ ; } t_2 = 0.2 \\ v_2 = 0.837125 \end{cases}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$K_1 = 0.0837125$

$L_1 = 0.06552$

$K_2 = 0.07716$

$L_2 = -0.0505596$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_3 = 0.26236 \; ; \; t_3 = 0.3 \\ w_3 = 0.779067 \end{cases}$$

$$c = \frac{\beta - w_3}{\beta_3} = \frac{e^{0.3} - 1.08695}{0.26236}$$ هذه الثابت (3)

$$= 1.00209$$

$$\begin{cases} y_1 = w_1 + (1.00209)\beta_1 = 1.1052 \\ y_2 = w_2 + (1.00209)\beta_2 = 1.22143 \\ y_3 = w_3 + (1.00209)\beta_3 = 1.349906 \end{cases}$$ (4)

الخطأ المطلق:

$$\begin{cases} \delta y_1 = |y_1 - e^{0.1}| = 2.7337 E-5 \\ \delta y_2 = |y_2 - e^{0.2}| = 2.739 E-5 \\ \delta y_3 = |y_3 - e^{0.3}| = 0 \end{cases}$$

انتهت المحاضرة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة

مكتبة A TO Z

فرع 1
تجمع الكليات(كلية العلوم)

فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960