كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : **التاسعة /نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

* طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة لحل مسألة القيم الابتدائية:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4]$$

$$k_1 = hf_1(t_i, y_i, z_i) \; ; \; i = 0, \dots, n-1$$
$$L_1 = hf_2(t_i, y_i, z_i)$$
$$k_2 = hf_1\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2}\right)$$
$$L_2 = hf_2\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf_1\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2}\right)$$
$$L_3 = hf_2\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2}\right)$$
$$k_4 = hf_1(t_i + h, y_i + k_3, z_i + L_3)$$
$$L_4 = hf_2(t_i + h, y_i + k_3, z_i + L_3)$$
$$y(t_0) = y_0$$
$$z(t_0) = z_0$$

مثال: استخدم طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة لحل المسألة:

$$\dot{y} = y - z + t + e^t$$
$$\dot{z} = z - y + e^t - t + 1$$
$$y(0) = 1$$
$$z(0) = 1$$
$$t \in [0, 0.2]$$

بخطوة $h = 0.1$

وحساب الخطأ المطلق في الحل العددي علماً أن

$$y(t) = e^t$$
$$z(t) = e^t + t$$

الحل:

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{0.2}{0.1} = 2$$

المطلوب حساب (y_1, z_1) ، (y_2, z_2)

$t_0 = 0$ ، $t_1 = 0.1$ ، $t_2 = 0.2$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4]$$

$$K_1 = h f_1(t_0, y_0, z_0) = (0.1)(y_0 - z_0 + t_0 + e^{t_0})$$
$$= (0.1)(1 - 1 + 0 + e^0) = 0.1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$L_1 = h f_2(t_0, y_0, z_0)$

$= (0.1)(z_0 - y_0 + e^{t_0} - t_0 + 1) \quad = 0.2$

$K_2 = (0.1) f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right)$

$= (0.1)\left(\left(y_0 + \frac{K_1}{2}\right) - \left(z_0 + \frac{L_1}{2}\right) + t_0 + \frac{h}{2} + e^{t_0 + \frac{h}{2}}\right)$

$= 0.10513$

$L_2 = h f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right)$

$= 0.20513$

$K_3 = 0.10513$

$L_3 = 0.20513$

$K_4 = 0.11052$

$L_4 = 0.21053$

$y_1 = 1.10517$

$z_1 = 1.20517$

$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)|$

$= |1.10517 - e^{0.1}|$

$= 9.18\ E-7$

$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)|$

$= 9.18\ E-7$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* مسائل القيم الابتدائية :

- المعادلة التفاضلية من المرتبة m :

تكتب بالشكل الضمني كالآتي :

$$F(t, y, \acute{y}, \acute{\acute{y}}, \dots, y^{(m)}) = 0 \quad (1)$$

وتكتب بالشكل الصريح :

$$y^{(m)} = f(t, y, \acute{y}, \dots, y^{(m-1)}) \quad (2)$$

ويستخدم مع المعادلة (1) أو (2) m شرطاً ابتدائياً :

$$\left.\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ \acute{y}(t_0) &= \acute{y}_0 \\ \acute{\acute{y}}(t_0) &= \acute{\acute{y}}_0 \\ &\vdots \\ y^{(m-1)}(t_0) &= y_0^{(m-1)} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

شروط ابتدائية

$$t \in [t_0, b]$$

تدعى المسألة (3) مع (2) مسألة قيمة ابتدائية للمعادلة التفاضلية من المرتبة m

* نقول ان الدالة $y(t)$ حلاً وصيداً للمسألة (2) و (3) اذا حقق هذا الحل المسألة (2) والشروط الابتدائية (3)

- مثال :

$$\acute{\acute{y}} + \acute{y} - y = e^t$$
$$y(0) = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y'(0) = 1$

إن $y(t) = e^t$ هو حل وحيد لمسألة لأنه:

* يحقق المعادلة التفاضلية:

$e^t + e^t - e^t = e^t$ ← محقق

* الشروط الابتدائية:

$e^0 = 1$ ← محقق ، $e^0 = 1$ ← محقق

- تحويل المسألة (3.) ـ (2.) إلى جملة معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى مع m شرط ابتدائي:

نفرض: $y = y_1$

$y_1' = y_2$

$y_2' = y_3$

$y_3' = y_4$

$\vdots \quad \vdots$

$y_{m-1}' = y_m$

$y_m' = f(t, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$

$y_1(t_0) = y_0$

$y_2(t_0) = y_0'$

$\vdots \quad \vdots$

$y_{m-1}(t_0) = y_0^{(m)}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$\ddot{y} = -\dot{y} + y + e^t = f(t, y, \dot{y})$$

الحل:

نفرض $y = y_1$

$$f_1(t, y_1, y_2) = \dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + y_1 + e^t$$

$$f_2(t, y_1, y_2) = \dot{y}_2 = -y_2 + y_1 + e^t$$

$$y_1(0) = 1$$

$$y_2(0) = 1$$

مثال:

استخدم طريقة منشور تايلور من الرتبة الثالثة لحل المسألة:

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = \cos t$$

$$y(0) = 0 \,,\ \dot{y}(0) = 1$$

$$t \in [0, 0.1]$$

خطوة $h = 0.1$ واحسب الخطأ المطلق في الحل

$$y(t) = \sin t$$

الحل:

$$n = \frac{b - t_0}{h} = \frac{0.1 - 0}{0.1} = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

قبل تطبيق الطريقة على المسألة يجب تخفيض وتحويل الحالة معادلتين كل واحدة منا من المرتبة الأول

نفرض $\acute{y} = z$

$$f_1(t,y,z) = \acute{y} = z$$
$$f_2(t,y,z) = \acute{z} = \acute{y} = -z - y + \cos t$$

$$(\acute{z} = -\acute{y} - y + \cos t)$$

$$\begin{cases} \acute{y} = z \\ \acute{z} = -z - y + \cos t \end{cases}$$

$$y(0) = 0 \quad y_0$$
$$z(0) = 1 \quad z_0$$

$$t \in [0, 0.1]$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_1'(t_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

$$f_1'(t,y,z) = \acute{z} = -z - y + \cos t$$
$$f_2'(t,y,z) = \acute{z}' = -\acute{z} - \acute{y} - \sin t$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= z + y - \cos t - z - \sin t$$
$$= y - \cos t - \sin t$$

$$y_1 = y_0 + (0.1) f_1(t_0, y_0, z_0) + \frac{(0.1)^2}{2} f_1'(t_0, y_0, z_0)$$

$$= 0 + (0.1)(z_0) + \frac{(0.1)^2}{2}(-z_0 - y_0 + \cos t_0)$$

$$= 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2}(-1+1) = 0.1$$

$$z_1 = z_0 + h f_2(t_0, y_0, z_0) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_0, y_0, z_0)$$

$$= z_0 + (0.1)(-z_0 - y_0 + \cos t_0) + \frac{(0.1)^2}{2}(y_0 - \sin t_0 - \cos t_0)$$

$$= 0.995$$

الحل $(y_1, z_1) = (0.1, 0.995)$

عند $t_1 = 0.1$

$$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)|$$
$$= |0.1 - \sin(0.1)|$$
$$= 1.665\ E-4$$

إذ z_1 هو الحل العددي لكن دقة الحل

الحل عند $t_1 = 0.1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)|$$
$$= |z_1 - y(t_1)|$$
$$= |0.995 - \cos(0.1)|$$
$$= 4.165\ E-6$$

حيث $y(t) = \cos t$

مثال: استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل المسألة:

$$y'' + y' - y = e^t$$
$$t \in [0,1]$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1$$

خطوة $h = 0.1$ واحسب الخطأ المطلق في الحل علماً أن:

$$y(t) = e^t$$

الحل:

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.1} = 10$$

أولاً: تحول المسألة إلى جملة معادلتين:

نفرض $y' = z$

$$f_1(t,y,z) = y' = z$$
$$f_2(t,y,z) = y'' = z' = -z + y + e^t$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y' = z$$
$$z' = -z + y + e^t$$

$$y(0) = 1$$
$$z(0) = 1$$

حساب الحل العددي y_1 عند $t_1 = 0.1$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$
$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2]$$

$$k_1 = h f_1(t_0, y_0, z_0)$$
$$= h z_0 = 0.1$$

$$L_1 = h f_2(t_0, y_0, z_0)$$
$$= h(-z_0 + y_0 + e^{t_0}$$
$$= 0.1$$

$$k_2 = h f_1'(t_0 + h, y_0 + k_1, z_0 + L_1)$$
$$= h(z_0 + L_1)$$
$$= 0.11$$

$$L_2 = h f_2(t_0 + h, y_0 + k_1, z_0 + L_1)$$
$$= h(-(z_0 + L_1) + (y_0 + k_1) + e^{t_0 + h})$$
$$= 0.110517$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}[0.1 + 0.11]$$
$$= 1.105$$
$$z_1 = 1 + \frac{1}{2}[0.1 + 0.1105 17]$$
$$= 1.10526$$

الخطأ المطلق في الحل العددي عند $t_1 = 0.1$

$$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)|$$
$$= |1.105 - e^{(0.1)}|$$
$$= 1.709\ E-4$$

$$y(t) = e^t \Rightarrow z(t) = \dot{y}(t) = e^t$$

$$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)|$$

$$= |z_1 - \dot{y}(t_1)|$$

$$= \cdots$$

نتابع بالأسلوب ذاته لإيجاد بقية الحلول.

مثال: استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة لحل المسألة:

$$\ddot{y} - \dot{y} - y + e^{t-1} = 0$$

$$y(1) = 1 \quad , \quad \dot{y}(1) = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$t \in [1, 1.5]$

ملاحظة: $h = 0.1$ مناسب لحساب الخطأ المطلق

في الحل علماً أن

$$y(t) = e^{t-1}$$

الحل:

$$n = \frac{1.5 - 1}{0.1} = 5$$

أي المطلوب حساب:

$$y_1, y_2, \ldots\ldots, y_5$$
$$Sy_1, Sy_2, \ldots\ldots, Sy_5$$

أولاً نحول المسألة إلى جملة معادلتين

نفرض

$$y' = z$$

$$\begin{cases} y' = z \\ y'' = z' = y' + y - e^{t-1} \\ \quad\;\; = z + y - e^{t-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = z = f_1(t, y, z) \\ z' = z + y - e^{t-1} = f_2(t, y, z) \end{cases}$$

$$y(1) = 1$$
$$z(1) = 1$$

نحسب الحل العددي y_1 عند $t_1 = t_0 + h$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$t_1 = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \\ z_1 = z_0 + \frac{1}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4] \end{cases}$$

$$K_1 = h f_1(t_0, y_0, z_0) = h z_0 = 0.1$$

$$L_1 = h f_2(t_0, y_0, z_0)$$

$$= h[y_0 + z_0 + e^{t_0 - 1}]$$

$$= 0.1$$

$$K_2 = h f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right)$$

$$= 0.105$$

$$L_2 = h f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right)$$

$$= h\left[\left(y_0 + \frac{K_1}{2}\right) + \left(z_0 + \frac{L_1}{2}\right) - e^{t_0 + \frac{h}{2} - 1}\right]$$

$$= 0.104873$$

$$K_3 = h f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}\right)$$

$$= h\left(z_0 + \frac{L_2}{2}\right) = 0.1052436$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$L_3 = h f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}\right)$$

$$= h\left[\left(y_0 + \frac{K_2}{2}\right) + \left(z_0 + \frac{L_2}{2}\right) - e^{t_0 + \frac{h}{2} - 1}\right]$$

$$= 0.1053665$$

$$K_4 = h f_1(t_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + L_3)$$

$$= h(z_0 + L_3) = 0.1105366$$

$$L_4 = h f_2(t_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + L_3)$$

$$= h\left[(y_0 + K_3) + (z_0 + L_3) - e^{t_0 + h - 1}\right]$$

$$= 0.1105439$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}[0.1 + 2(0.105) + 2(0.1052436) + 0.1105366]$$

$$= 1.1051706$$

$$z_1 = 1 + \frac{1}{6}[0.1 + 2(0.1048733) + 2(0.1053665) + 0.1105439]$$

$$= 1.1051704$$

$$Sy_1 = |y_1 - y(t_1)| = |y_1 - e^{t-1}| = 3.1807\,E-7$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة

مكتبة A TO Z

فرع 1
تجمع الكليات(كلية العلوم)

فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960