كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : الثامنة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

* طرق حل جملة معادلات:

1) طريقة أولر لحل المسألة رقم (3) من المحاضرة السابعة:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

$$y(t_0) = \alpha_1 \quad \& \quad z(t_0) = \alpha_2$$

$$t \in [t_0, b] \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

تعتمد الطرائق العددية على تجزئة مجال الحل إلى n مجال جزئي من الشكل:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < b = t_n$$

وإذا كانت التجزئة منتظمة نستطيع إيجادها بالعلاقة من الشكل:

$$t_i = t_0 + ih$$

بتطبيق هذه التجزئة المنتظمة نحصل على التحليل العددي من الشكل:

الحل التحليلي لـ $y(t)$:

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

الحل التحليلي لـ $z(t)$:

$z_1, z_2, \dots, z_n$

الخطوة الأولى:

إن الخطوة (1) في الحل العددي (y_1, z_1) عند $t = t_1$

والخطأ المطلق لهذا الحل هو:

$$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)|$$

$$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)|$$

إن الحل العددي في الخطوة الثانية:

$t = t_2$ عند (y_2, z_2)

الخطوة (n):

$t = t_n$ عند (y_n, z_n)

مثال: لتكن لدينا المسألة (مسألة القيم الابتدائية) التالية:

$$\begin{cases} y' - y + z = e^t \\ z' + y - z = e^t \\ y(0) = 1 \ \& \ z(0) = 1 \end{cases}$$

$$t \in [0, 0.2]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المطلوب إيجاد الحل العددي لهذه المسألة بطريقة أويلر الخطوة $h = 0.1$ وحساب الخطأ المطلق في الحل العددي إذا علمت أنّ:

$$Z(t) = y(t) = e^t$$

(الحل التحليلي أو الحل الدقيق)

الحل:

$$n = \frac{b - t_0}{h} = 2$$

المطلوب:

$$(y_1, Z_1)$$
$$(y_2, Z_2)$$

$$y' = y - Z + e^t = f_1(t, y, Z)$$
$$Z' = -y + Z + e^t = f_2(t, y, Z)$$

عندما $n = 1$ (الخطوة الأولى):

$$y_1 = y_0 + h f_1(t_0, y_0, Z_0)$$
$$= 1 + (0.1) f_1(0, 1, 1)$$
$$= 1 + (0.1)(y_0 - Z_0 + e^{t_0})$$
$$= 1 + (0.1)(1 - 1 + e^0)$$
$$= 1.1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$z_1 = z_0 + h f_2(t_0, y_0, z_0)$$
$$= 1 + (0.1)(-y_0 + z_0 + e^{t_0})$$
$$= 1.1$$

الحل العددي الأول: عند $h=1$

هو $(1.1, 1.1)$

$$t_i = t_0 + ih$$
$$t_1 = t_0 + (1)h = 0.1$$

- الخطأ المطلق عند الخطوة الأولى:

$$S y_1 = |y_1 - y(t_1)| = |1.1 - e^{0.1}|$$
$$\simeq 5.1707 E-3 = S z_1$$

- الخطوة الثانية: $h=2$

$$y_2 = y_1 + h f_1(t_1, y_1, z_1)$$
$$= y_1 + h[y_1 - z_1 + e^{t_1}]$$
$$= 1.2105 17$$
$$z_2 = z_1 + h f_2(t_1, y_1, z_1)$$
$$= z_1 + h(-y_1 + z_1 + e^{t_1})$$
$$= 1.21 0517$$

- الخطأ المطلق عند الخطوة الثانية عند:

$$t_2 = 0.2 = b$$
$$S y_2 = S z_2 = |y_2 - y(t_2)| = 1.08857 E-2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

أفضل حلّ في بداية المجال وأسوءها في نهاية المجال لأنّ الحلّ يتراكم بدءاً من الشرط الإبتدائي.

[2] طريقة منشور تايلور من المرتبة m لحلّ المسألة رقم (3):

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2!} f_1'(t_i, y_i, z_i) \\ \quad + \dots + \frac{h^{(m)}}{m!} f_1^{(m-1)}(t_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2!} f_2'(t_i, y_i, z_i) \\ \quad + \dots + \frac{h^{(m)}}{m!} f_2^{(m-1)}(t_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

$$t \in [t_0, b]$$

* الحالات الخاصّة:

1) $m=1$ يحصل على طريقة من المرتبة الأولى (طريقة أويلر).

2) $m=2$ يحصل على طريقة من المرتبة الثانية (مكافئة لرانج كوتا من المرتبة 2).

مثال:

استخدم طريقة منشور تايلور من المرتبة (2) لحلّ المسألة:

$$\begin{cases} y' - y - z = -\sin t \\ z' + y - z = -\cos t \end{cases}$$

$y(0) = 0$ و $z(0) = 1$

في المجال $[0, 0.2]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خطوة $h=0.1$

واحسب الخطأ المطلق في الحل العددي علماً أنّ:

$z(t)=\cos t$

$y(t)=\sin t$

$z(0)=1$ و $y(0)=0$

$h=0.1 \Rightarrow n=\frac{0.2-0}{0.1}=2$ الحل:

$\boxed{n=2}$

والمطلوب حساب (y_1,z_1)، (y_2,z_2) مع الأخطاء،

- لدينا من الآلة الأولى:

$y'=y+z-\sin t=f_1(t,y,z)$

$z'=-y+z-\cos t=f_2(t,y,z)$

الطريقة الثانية $m=2$

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+h f_1(t_i,y_i,z_i)+\frac{h^2}{2!}f_1'(t_i,y_i,z_i) \\ z_{i+1}=z_i+h f_2(t_i,y_i,z_i)+\frac{h^2}{2!}f_2'(t_i,y_i,z_i) \end{cases}$$

نحسب المشتقات من الآلة:

$y'=f_1(t,y,z) \Rightarrow y''=f_1'(t,y,z)$

$y''=y'+z'-\cos t$

$y''=(y+z-\sin t)+(-y+z-\cos t)-\cos t$

$y''=2z-\sin t-2\cos t$

$z'=f_2(t,y,z) \Rightarrow z''=f_2'(t,y,z)$

$\Rightarrow z''=-y'+z'+\sin t$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$z'' = -(y+z-\sin t)+(-y+z-\cos t)+\sin t$$

$$z'' = -2y+2\sin t-\cos t$$

$$y_{i+1} = y_i + h(y_i+z_i-\sin t_i) + \frac{h^2}{2}(2z_i-\sin t_i-2\cos t_i)$$

$$z_{i+1} = z_i + h(-y_i+z_i-\cos t_i) + \frac{h^2}{2}(-2y_i+2\sin t_i-\cos t_i)$$

نحسب الحل العددي عند (y_1, z_1)

$$t_1 = t_0 + h$$

$$t_1 = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + h(y_0+z_0-\sin t_0) + \frac{h^2}{2}(2z_0-\sin t_0-2\cos t_0)$$

$$= 0+0.1(0+1-0)+\frac{(0.1)^2}{2}\times(2\times1-0-2\times1)$$

$$= 0.1$$

$$z_1 = z_0 + h(-y_0+z_0-\cos t_0) + \frac{h^2}{2}(-2y_0+2\sin t_0-\cos t_0)$$

$$= 1+(0.1)(-0+1-1)+\frac{(0.1)^2}{2}(-2\times0+2\times0-1)$$

$$= 0.995$$

$$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)| = |0.1-\sin(0.1)|$$

$$= 1.667\,E{-4}$$

$$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)| = |0.995-\cos(0.1)|$$

$$= 4.1651\,E{-6}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$t_2 = 0.2$ عند (y_2, z_2) حساب

(وهو نهاية المجال)

$$y_2 = y_1 + h(y_1 + z_1 - \sin t_1) + \frac{h^2}{2}(2z_1 - \sin t_1 - 2\cos t_1)$$

$$= 0.199017 > y_1$$

$$z_2 = z_1 + h(-y_1 + z_1 - \cos t_1) + \frac{h^2}{2}(-2y_1 + 2\sin t_1 - \cos t_1)$$

$$= 0.980023$$

$$\delta y_2 = |y_2 - y(t_2)| = |0.199017 - \sin(0.2)|$$

$$= 3.4812\ E-4$$

$$\delta z_2 = |z_2 - z(t_2)| = |0.980023 - \cos(0.2)|$$

$$= 4.3681\ E-5$$

* مرتبة طريقة عددية:

نقول عن طريقة عددية أنها من المرتبة m إذا كان الفرق بين الدالة $y(t)$ وبين التقريب $\tilde{y}$ من المرتبة h^m

أي:

$$y(t) - \tilde{y} = O(h^m) \quad \forall\, t \in [t_0, b]$$

أكل التقريب يسعى إلى الحل الدقيق عندما تكون النهاية:

$$\lim_{h \to 0} O(h^m) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إنّ هذه الدالة $y(t)$ هي دالة الخطأ سنعمل إلى الصفر بسرعة أكبر كلّما كانت m أكبر.

ونتذكّر أنّ m هي مرتبة الطريقة ولهذا فإنّ الطريقة التي تكون منها $m=1$ هي أقلّ دقّة من جميع الطرائق التي تعلوها في المرتبة أي عندما $m>1$

(1 تكون أولر)

- نسمّي الخطأ:

$$y(t_i) - \tilde{y}(t_i) = O(h^m)$$

- الخطأ الموضعي (المحلّي) (Local)

وهو يقيس الخطأ الحاصل عند الإنتقال من الخطوة t_{i-1} إلى الخطوة t_i

- أمّا الخطأ الشامل فهو أكبر الأخطاء على كامل مجال الحلّ (global) (ويكون غالباً في نهاية المجال).

[3] طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحلّ مسألة القيم الإبتدائية:

$$\begin{cases} y' = f_1(t, y, z) \\ z' = f_2(t, y, z) \end{cases}$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$z(t_0) = z_0$$

حيث الحلّ الدقيق $y(t)$ و $z(t)$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}[K_1 + K_2] \\ z_{i+1} = z_i + \frac{1}{2}[L_1 + L_2] \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$K_1 = hf_1(t_i, y_i, z_i)$$

$$L_1 = hf_2(t_i, y_i, z_i)$$

$$K_2 = hf_1(t_i + h, y_i + K_1, z_i + L_1)$$

$$L_2 = hf_2(t_i + h, y_i + K_1, z_i + L_1)$$

- الخطأ من الشكل:

$$O(h^2)$$

ملاحظة: إنّ طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

هي:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$$

$$K_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$K_2 = hf(t_i + h, y_i + K_1)$$

* تعريف التقارب:

نقول عن طريقة عددية تنتج متتالية الحل العددي:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

أنّها متقاربة إذا تحقق الآتي:

إذا كانت نقطية $y(t_i)$ هي y_i عندما $h \to 0$

أي: $\lim_{h \to 0} y(t_i) = y_i \quad ; i = 1, \ldots, n$

$h \to 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال 12: استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' - y - z = -\sin t \\ z' + y - z = -\cos t \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

$t \in [0, 0.2]$

خطوة $h = 0.1$

والحل الدقيق للمسألة المعطاة هو:

$$y(t) = \sin t$$

$$z(t) = \cos t$$

$$n = \frac{0.2 - 0}{0.1} = 2$$ (الحل)

$t_0 = 0$ ، $y_0 = 0$ ، $z_0 = 1$

نحسب أولاً (y_1, z_1) و $(\delta y_1, \delta z_1)$

$$\begin{cases} y' = y + z - \sin t = f_1(t, y, z) \\ z' = -y + z - \cos t = f_2(t, y, z) \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2]$$

$$t_1 = t_0 + h = 0.1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$k_1 = hf_1(t_0, y_0, z_0)$$
$$= (0.1)[y_0 + z_0 - \sin t_0]$$
$$= 0.1$$
$$L_1 = hf_2(t_0, y_0, z_0)$$
$$= (0.1)[-y_0 + z_0 - \cos t_0]$$
$$= 0$$
$$k_2 = hf_1(t_0 + h, y_0 + k_1, z_0 + L_1)$$
$$= (0.1)[(y_0 + k_1) + (z_0 + L_1) - \sin(t_0 + h)]$$
$$\approx 0.100000167$$
$$L_2 = hf_2(t_0 + h, y_0 + k_1, z_0 + L_1)$$
$$= (0.1)[-(y_0 + k_1) + (z_0 + L_1) - \cos(t_0 + h)]$$
$$\approx -0.0095$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 + \frac{1}{2}[0.1 + 0.100000167] \\ \quad = 0.100001 \\ z_1 = 1 + \frac{1}{2}[0 - 0.0095] \\ \quad = 0.99525 \end{cases}$$

$$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)| = |0.100001 - \sin(0.1)|$$
$$= 1.749 \; E-4$$
$$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)| = |0.99525 - \cos(0.1)|$$
$$= 2.456 \; E-4$$

- كذلك الآن (y_2, z_2) , $(\delta y_2, \delta z_2)$ عند

$$t_2 = t_0 + 2h = 0.2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2] \\ z_2 = z_1 + \frac{1}{2}[l_1 + l_2] \end{cases}$$

$k_1 = h f_1(t_1, y_1, z_1)$

$= (0.1)[y_1 + z_1 - \sin t_1]$

$= 0.09954$

$l_1 = h f_2(t_1, y_1, z_1)$

$= (0.1)[-y_1 + z_1 - \cos t_1]$

$\simeq 0.00976$

$k_2 = h f_1(t_1 + h, y_1 + k_1, z_1 + l_1)$

$= (0.1)[(y_1 + k_1) + (z_1 + l_1) - \sin(t_1 + h)]$

$\simeq 0.09862$

$l_2 = h f_2(t_1 + h, y_1 + k_1, z_1 + l_1)$

$= (0.1)[-(y_1 + k_1) + (z_1 + l_1) - \cos(t_1 + h)]$

$\simeq 0.01994$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 = 0.1\,99009 \\ z_2 = 0.98554 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta y_2 = |y_2 - y(t_2)| = 4.2\,E-4 \\ \delta z_2 = |z_2 - z(t_2)| = 4.8\,E-4 \end{cases}$$

انتهت ♡

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة