كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : **السابعة /نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

* طريقة غاوس ليجندر :

تستخدم لإيجاد تكامل محدود من الشكل :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt \qquad (1)$$

إن هذه الطريقة تعطي قيمة تقريبية لـ I على شكل المجموع

$$S = \sum_{i=1}^{N} W_i\, f(t_i) \qquad (2)$$

حيث W_i تدعى أوزان (أعداد موجبة)

t_i تدعى نقاط غاوس (هي أصفار كثيرة حدود ليجندر من الدرجة N)

والسؤال الآن

كيف يمكن تحديد قيمة الأوزان W_i ونقاط غاوس t_i

* تكامل غاوس ليجندر باستخدام نقطتين لغاوس $N=2$:

الفكرة تقول أنه إذا كانت دالة التكامل $f(t)$ كثيرة حدود من الدرجة أصغر أو تساوي $(2N-1=3)$

عندئذٍ فإن :

التكامل (1) يعطى بدقة تامة باستخدام N

نقطة غاوسية وفق الصيغة التالية: $(N=2)$

$$S = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2)$$

لدينا أربع مجاهيل هي:

$$\{w_1, w_2, t_1, t_2\}$$

نحصل على هذه المجاهيل بحل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$f(t)=1 \; ; \; w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{+1} 1\,dt$$

$$\Rightarrow w_1 + w_2 = 2 \qquad (1)$$

$$f(t)=t \; ; \; w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{1} t\,dt$$

$$\Rightarrow w_1 t_1 + w_2 t_2 = 0 \qquad (2)$$

$$f(t)=t^2 \; ; \; w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{+1} t^2\,dt$$

$$\Rightarrow w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 = \frac{2}{3} \qquad (3)$$

$$f(t)=t^3 \; ; \; w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{+1} t^3\,dt$$

$$\Rightarrow w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 = 0 \qquad (4)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالحل المشترك لجملة المعادلات (1) و (2) و (3) و (4)

نحصل على $w_1 = w_2 = 1$

$$t_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \quad , \quad t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

فنجد أن:

$$S = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

* تكامل غاوس ليجندر باستخدام N نقطة غاوسية:

إذا كانت $f(t)$ كثيرة حدود من الدرجة أصغر أو تساوي $(2N-1)$ فإن التكامل (1) يعطى بدقة تامة باستخدام N نقطة غاوسية وفق العلاقة (2)

حيث المجاهيل w_i و t_i التي عددها $2N$ مجهول

باستخدام جملة المعادلات:

$$f(t) = 1 \; ; \; w_1 + w_2 + \dots + w_N = 2$$

$$f(t) = t \; ; \; w_1 t_1 + w_2 t_2 + \dots + w_N t_n = 0$$

$$f(t) = t^2 \; ; \; w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 + \dots + w_N t_N^2 = \frac{2}{3}$$

$$\vdots$$

$$f(t) = t^i \; ; \; w_1 t_1^i + w_2 t_2^i + \dots + w_N t_N^i = \frac{1-(-1)^{i+1}}{i+1} \quad \dots (3)$$

$$\vdots$$

$$f(t) = t^{N-1} \; ; \; w_1 t_1^{N-1} + w_2 t_2^{N-1} + \dots + w_N t_N^{N-1} = \frac{1-(-1)^N}{N}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

جملة معادلات مؤلفة من N مجهول و N معادلة
ويمكن كتابتها على شكل مصفوفات وبالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^i & t_2^i & \cdots & t_N^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{N-1} & t_2^{N-1} & \cdots & t_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \vdots \\ \frac{1-(-1)^N}{N} \end{bmatrix}$$

حيث:

$$\int_{-1}^{+1} t^{N-1}\,dt = \frac{1-(-1)^N}{N}$$

حيث: $i = 1, \ldots, N$

t_i كجذر من كثيرة حدود ليجندر $L_N(t)$

علينا الآن حسابها؛ لأجل ذلك نعرّف كثيرة حدود ليجندر بالشكل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$L_N(t) = \sum_{i=0}^{[\frac{N}{2}]} (-1)^i \frac{(2N-2i)!\, t^{N-2i}}{2^N i!\,(N-i)!\,(N-2i)!} \qquad \ldots\ldots (4)$$

حيث $[\frac{N}{2}]$ هي أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي لـ $\frac{N}{2}$

نعوض الصيغة (4) كثيرات الحدود :

$L_0(t) = 1$

$L_1(t) = t$

$L_2(t) = \frac{1}{2}[3t^2 - 1]$

$L_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t]$

$L_4(t) = \frac{1}{8}[35t^6 - 30t^2 + 3]$

★ من أجل $N = 2$

يمكن حساب t_1, t_2 من $L_2(t)$

$$L_2(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[3t^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \quad \& \quad t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

★ من أجل $N = 3$

$$L_3(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[5t^3 - 3t] = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group : A to Z مكتبة

$$\Rightarrow t=0 \quad \& \quad t = \mp\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad \& \quad t_2 = 0 \quad \& \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

ملاحظة

نحسب هذه الجذور التي هي نقاط غاوس t_i ونعوضها في صيغة الجملة (3) ومن هذه الجملة نحصل على المجاهيل

$$\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$$

مثال:

استخدم طريقة غاوس ليجندر من أجل نقطتين غاوسيتين لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل:

$$I = \int_{-1}^{+1} x^2 \cos x \, dx$$

الحل:

$$S = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نحسب t_1 و t_2 من $L_2(t)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$L_2(t) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[3t^2 - 1\right] = 0$$

$$\Rightarrow w_1 + w_2 = 2 \qquad (1)$$

$$f(t) = t \;;\; w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{1} t\,dt$$

$$\Rightarrow w_1 t_1 + w_2 t_2 = 0 \qquad (2)$$

$$f(t) = t^2 \;;\; w_1 f(t) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{+1} t^2\,dt$$

$$\Rightarrow w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 = \frac{2}{3} \qquad (3)$$

$$f(t) = t^3 \;;\; w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{+1} t^3\,dt$$

$$\Rightarrow w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 = 0 \qquad (4)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلات (1) و (2) و (3) و (4)

نحصل على $w_1 = w_2 = 1$

$$t_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \quad , \quad t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

فنجد أن

$$S = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group : A to Z مكتبة

* تكامل غاوس ليجندر باستخدام N نقطة غاوسية:

إذا كانت f(t) كثيرة حدود من الدرجة أصغر أو يساوي (2N-1)
فإن التكامل (1) يعطى بدقة تامة باستخدام N
نقطة غاوسية وفق العلاقة (2) حيث المجاهيل w_i و t_i
التي عددها 2N مجهول
باستخدام جملة المعادلات

$$f(t)=1 \;:\; w_1+w_2+\dots+w_N=2$$
$$f(t)=t \;:\; w_1t_1+w_2t_2+\dots+w_Nt_N=0$$
$$f(t)=t^2 \;:\; w_1t_1^2+w_2t_2^2+\dots+w_Nt_N^2=\frac{2}{3}$$
$$\vdots$$
$$f(t)=t^i \;:\; w_1t_1^i+w_2t_2^i+\dots+w_Nt_N^i=\frac{1-(-1)^{i+1}}{i+1} \quad \dots(3)$$
$$\vdots$$
$$f(t)=t^{N-1} \;:\; w_1t_1^{N-1}+w_2t_2^{N-1}+\dots+w_Nt_N^{N-1}=\frac{1-(-1)^N}{N}$$

جملة معادلات مؤلفة من N مجهول و N معادلة

• ويمكن كتابتها على شكل مصفوفات وبالشكل التالي:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^i & t_2^i & \cdots & t_N^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{N-1} & t_2^{N-1} & \cdots & t_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \vdots \\ \frac{1-(-1)^N}{N} \end{bmatrix}$$

حيث :

$$\int_{-1}^{+1} t^{N-1}\, dt = \frac{1-(-1)^N}{N}$$

حيث : $i = 1, \ldots, N$

(t_i تحسب من كثيرة حدود ليجندر $L_N(t)$) و

علينا الآن حسابها ، لأجل ذلك نعرف كثيرة حدود ليجندر بالشكل :

$$L_N(t) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} (-1)^i \frac{(2N-2i)!\, t^{N-2i}}{2^N i!\,(N-i)!\,(N-2i)!} \qquad \ldots\ldots (4)$$

حيث $\left[\frac{N}{2}\right]$ هو أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي لـ $\frac{N}{2}$

تعطى الصيغة (4) كثيرات حدود :

TEL:0931497960 - Facebook Group : A to Z مكتبة

$L_0(t) = 1$

$L_1(t) = t$

$L_2(t) = \frac{1}{2}[3t^2 - 1]$

$L_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t]$

$L_4(t) = \frac{1}{8}[35t^6 - 30t^2 + 3]$

★ من أجل $N=2$ يكون صفرا $L_2(t)$ من t_2, t_1

$L_2(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[3t^2 - 1] = 0$

$\Rightarrow t_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ و $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

★ من أجل $N=3$

$L_3(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[5t^3 - 3t] = 0$

$\Rightarrow t = 0$ و $t = \mp\sqrt{\frac{3}{5}}$

$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ و $t_2 = 0$ و $t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة

نسب هذه الجذور التي هي نقاط غاوس t_i وتعوض في صيغة الجملة (3) ومن خلال هذه الجملة نحصل على المجاهيل

$$\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$$

مثال:

استخدم طريقة غاوس ليجندر من أجل نقطتين غاوسيتين لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل:

$$I = \int_{-1}^{+1} x^2 \cos x \, dx$$

الحل:

$$S = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نسمي t_1 و t_2 من $L_2(t)$

$$L_2(t) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[3t^2 - 1\right] = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \quad \& \quad t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ونعوض:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1 + w_2 = 2$$

$$-w_1 + w_2 = 0$$

بالحل بالحذف نجد أن:

$$w_1 = w_2$$

$$2w_2 = 2 \Rightarrow w_2 = 1$$

$$\Rightarrow w_1 = w_2 = 1$$

$$S = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 0.558608$$

مثال:

حل المثال السابق باستخدام ثلاث نقاط غاوسية

الحل:

$$S = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 (t_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

كنسب t_1 و t_2 و t_3 من $L_3(t)$ و $t_3(t) = 0$

$$\frac{1}{2}\left[5t^3 - 3t\right] = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad \& \quad t_2 = 0 \quad \& \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

ومنعوض في المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

بالحل المشترك نجد أن:

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$$

$$w_2 = \frac{8}{9}$$

$$S = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$$

$$\simeq 0.476469$$

"وظيفة"

$$I = \int_0^1 (2x-1)^2 e^{2x-1}\, dx \quad , N = 3$$

(أوجد باستخدام ثلاث نقط غاوسية التكامل؟)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

✱ الحلول العددية لمسائل القيم الإبتدائية في جمل المعادلات التفاضلية :

لقدمنا في التحليل العددي (١) حل عددي لمسألة القيمة الإبتدائية

$$(\star)\begin{cases} y' = f(t,y) & \text{المعادلة التفاضلية} \\ y(t_0) = y_0 & \text{الشرط الإبتدائي} \end{cases}$$
$$t \in [t_0, b]$$

نطلق كلية مسألة قيمة ابتدائية على المعادلة التفاضلية والشرط الإبتدائي ويكون $y(t)$ حلاً للمسألة $(\star)$ إذا حقق هذا الحل المعادلة التفاضلية والشرط الإبتدائي.

- قسمت مجموعة من طرائق حل المسألة $(\star)$ منها أولر (مرتبة أولى) وأولر المعدلة (من المرتبة الثانية) أو طريقة هيون وطرائق رانج كوتا (تبدأ من المرتبة 2 ، 3 ، 4 ، 5)

تدعى بعائلة طريقة منشور تايلور من المرتبة m حيث :

عندما $m=1$ تتبع طريقة أولر

وعندما $m=2$ تتبع طريقة مكافئة لهيون أو لرانج كوتا من المرتبة الثانية وهكذا

- لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية :

$$(1)\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مع الشروط الابتدائية :

$$(2)\begin{cases} y_1(t_0) = \alpha_1 \\ y_2(t_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ y_n(t_0) = \alpha_n \end{cases}$$

تدعى جملة المعادلات (1) مع الشروط الابتدائية (2) بمسألة القيم الابتدائية لجملة المعادلات التفاضلية (1).

- إن الدوال f_i حيث $i = 1, \dots, n$ يمكن أن تكون خطية أو غير خطية في $y_1, \dots, y_n$

- تدعى الدوال $y_1(t), \dots, y_n(t)$ حلول وحيدة لمسألة (1) و (2) (مسألة القيم الابتدائية ، إذا حققت هذه الدوال الجملة (1) والشروط الابتدائية (2))

ملاحظة: سنفترض دوماً أن حل مسألة القيمة الابتدائية (1) و (2) موجود.

وهذا لا يعني أننا نستطيع الحصول عليه بالطرق التحليلية ، يعني قد لا نستطيع إيجاد تعابير تحليلية لهذا الحل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y_1(t), \dots, y_n(t)$

من هنا تأتي أهمية إيجاد الحل التقريبي لهذا الحل بالطرق العددية.

مثال:

لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$(1)\begin{cases} y' = y + z - \sin(t) \\ z' = z - y - \cos(t) \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} y(0) = 0 \quad , z(0) = 1 \\ t \in [0, b] \quad ; b > 0 \end{cases}$$

الحل:

$$y' = f_1(t, y, z)$$
$$z' = f_2(t, y, z)$$

إذ

$$y(t) = \sin t$$
$$z(t) = \cos t$$

حلول المسألة الأولى تحقق (1) و(2)

(جملة المعادلتين (2) - (1))

$$y'(t) = \cos t$$
$$z'(t) = -\sin t$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض:

$$\cos t = \sin t + \cos t - \sin t$$

$$-\sin t = \cos t - \sin t - \cos t$$

$$y(0) = \sin(0) = 0$$

$$z(0) = \cos(0) = 1$$

ملاحظة:

سنقتصر دراستنا على إيجاد الحل العددي لجملة المعادلتين:

$$(3)\begin{cases} \dot{y} = f_1(t, y, z) \\ \dot{z} = f_2(t, y, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t_0) = \alpha_1 \\ z(t_0) = \alpha_2 \end{cases}$$

$$t \in [t_0, b]$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة