كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : **السادسة** /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

* المشتقات التقريبية:

[1] صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لإيجاد قيمة المشتق الثاني $f''(x)$:

نفرض أنّ $f(x) \in C^4[a,b]$

$f(x) \in C^4[x-h, x+h]$

حيث h خطوة،

نشر $f(x+h)$ و $f(x-h)$ حول x

ونكتفي بإيجاد حتى المشتق الرابع:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(c)$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(c)$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

; $c \in [x-h, x+h]$

نجمع:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{2h^4}{4!} f^{(4)}(c)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(c)}{h^2} \quad (1)$$

من الواضح أنّ الحدّ الثاني في العلاقة (1) يعطي صيغة دقيقة عندما $h \to 0$

لذلك نسمّي الخطأ المقطوع:

$$o(h^2) = \frac{h^2}{12} f^{(4)}(c) \longrightarrow 0$$

$h \to 0$

ولكن ذلك مستحيل حاسوبياً لهذا سنكتفي بـ h صغيرة بقدر كافٍ $(h < 1)$ ولنحصل على الصيغة التقريبية من المرتبة الثانية لإيجاد الحدّ الثاني تكون لدينا الصيغة:

$$d_2(x,h) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

الخطأ المقطوع:

$$E(x,h) = \left| -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(c) \right|$$

Trun

; $c \in [x-h, x+h]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب قيمة تقريبية للمشتق الثاني للدالة:

$$f(x) = x^2 - e^{x-1}$$

عند $x = 1$

واحسب الخطأ بين المقطع والمطلق مستخدم الخطوات:

$$h_k = (0.1)^k \quad ; \quad k = 1, 2, 3, 4$$

الحل: من أجل $k = 1 \leftarrow h_1 = 0.1$

$$d_2(1, h_1) = \frac{f(1+h_1) + f(1-h_1) - 2f(1)}{h_1^2}$$

$$= \frac{f(1.1) + f(0.9) - 2f(1)}{(0.1)^2}$$

$$= 0.9991664$$

الخطأ المطلق $\delta h_1 = |f''(1) - d_2(1, h_1)|$

$$= |1 - 0.9991664|$$

$$= 8.336 \; E-4$$

الخطأ المقطع $E(1, h_1) = \left\{ \frac{-h^2}{12} f^{(4)}(c) \right|$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

و $c \in [0.9, 1.1]$

$$f^{(4)}(x) = -e^{x-1}$$

$$\max |f^{(4)}(x)| = |-e^{1.1-1}|$$

$$= e^{0.1} \simeq 1.105171$$

و $x \in [0.9, 1.1]$

$$\Rightarrow E_{h_1}(1, h) = E_h(1, 0.1)$$

$$\leq \left| \frac{-(0.1)^2}{12} e^{0.1} \right|$$

$$\simeq 9.209 E-4$$

$h_k = (0.1)^k$	$d_2(1, h_k)$	$\delta_{hk} = \lvert 1 - d_2(1, h_k) \rvert$	$E_{hk} = \left\lvert \frac{hk^2}{12} e^{hk} \right\rvert$
$h_1 = 0.1$	0.9991664	8.336 E-4	9.209 E-4
$h_2 = (0.1)^2$	0.99999 16667	8.333 E-6	8.417 E-6
$h_3 = (0.1)^3$	0.999999917	8.3 E-8	8.3417 E-6
$h_4 = (0.1)^4$	= تقريباً 1	= تقريباً 0	8.33417E-10

الطريقة بصفر الخطوة ستعمل على قيم غير مقاربة وقد تكون النتيجة خاطئة بسبب عدم الاستقرار الحاسبي (القسم على مقادير قريبة من 0)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

[2] صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لإيجاد قيمة المشتق الثالث $f'''(x)$ عند x :

$$d_3(x,h) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{3h^3}$$

خطأ مقطع :

$$E(x,h) = \frac{1}{2} h^2 f^{(5)}(c)$$

; $c \in [x-2h, x+2h]$

مثال: استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب قيمة تقريبية لـ $f'''(1)$ للدالة :

$$f(x) = \sin(x-1) + x^3$$

وحساب الأخطاء المطلقة و المتوقعة لأجل

$$h_k = (0.1)^k$$

$$k = 1, \dots, 5$$

الحل:

$$k=1 \; ; \; h_1 = 0.1$$

$$d_3(1, 0.1) = \frac{f(1+0.2) - 2f(1.1) + 2f(0.9) - f(0.8)}{2(0.1)^3}$$

$$\simeq 5.00249$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$E_T(1,0.1) = \frac{1}{2} h_1^2 f^{(5)}(c)$$

$$; c \in [0.8, 1.2]$$

$$f^{(5)}(x) = \cos(x-1)$$

$$|\max f^{(5)}(x)| = 1$$

$$x \in [0.8, 1.2]$$

$$\Rightarrow E_T(1,0.1) = \frac{1}{2} h_1^2 = \frac{(0.1)^2}{2}(1)$$

$$= 0.005$$

ملاحظة الخطأ :

$$\delta_{h_1} = |f'''(x) - d_3(x, h_1)|$$

$$= |5 - 5.00249|$$

$$= 2.49 \; E-3$$

* التكاملات العددية :

لقد مر معنا في الفصل العددي 1 مجموعة من الطرائق لإيجاد قيمة التكاملات العددية من الشكل :

$$I = \int_b^9 f(x)\, dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وهذه الطريقة :

طريقة المستطيلات ، أسبابه ، لغرغات ، سيمبسون .

اعتمدت هذه الطريقة على تجزئة مجال التكامل إلى متتالية من المجالات الجزئية من الشكل :

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$$

حيث $a = x_0$ ، $b = x_n$

تحسب النقاط x_i بالعلاقة :

$$x_i = a + ih \quad ; \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$i = 0, \dots, n$$

ستكون أطوال هذه المجالات الجزئية متساوية ووفق هذه التجزئة وطولها يساوي h .

1- تميزت طريقة سيمبسون أنها استخدمت المجالات الجزئية الآتية :

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], [x_4, x_6], \dots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$$

حيث اشترطنا أن n عدد زوجي لذلك يكتب بالشكل :

$$n = 2m$$

ويكون التكامل بالشكل :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)\,dx$$

- عدد الحالات الكلية هو m :

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right] + \frac{h}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4\right] + \cdots + \frac{h}{3}\left[f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}\right]$$

$$\Rightarrow I = S = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{m}\left[f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}\right]$$

الخطأ المقطوع :

$$E_T(h) = \left|\frac{-(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(c)\right|$$

$$= O(h^4)$$

$$; c \in [x_0, x_{2m}] \equiv [a,b]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- سمبسون المركبة:

تكاملات سمبسون عبر قاعدة ثلاث مجالات جزئية:

تقسم هذه الطريقة المجال الجزئية الآتية:

$$[x_0, x_3], [x_3, x_6], \dots, [x_{3m-3}, x_{3m}]$$

نفرض أن n تقبل القسمة على 3 دون باقٍ

$$n \bmod 3 \equiv 0 \quad , \quad n = 3m$$

$$I = \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)\,dx$$

$$+ \dots + \int_{x_{3m-3}}^{x_{3m}} f(x)\,dx$$

إن $p_1(x)$ هي كثيرة حدود الدرجة الثالثة التي تقرب الدالة $f(x)$ المعرفة بالنقاط:

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2),$$

$$(x_3, f_3)$$

لذلك:

$$p_1(x) = \sum_{j=0}^{3} L_j(x) f_j$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int_{x_0}^{x_3} p_1(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right]$$

$$\int_{x_3}^{x_6} p_2(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f_3 + 3f_4 + 3f_5 + f_6\right]$$

$$\int_{x_{3m-3}}^{x_{3m}} p_m(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f_{3m-3} + 3f_{3m-2} + 3f_{3m-1} + f_{3m}\right]$$

$$\Rightarrow I = S = \frac{3h}{8}\sum_{i=1}^{m}\left[f_{3i-3} + 3f_{3i-2} + 3f_{3i-1} + f_{3i}\right]$$

وهي صيغة سمبسون على قاعدة ثلاث مجالات جزئية .

$$E_T(h) = \left|-\frac{(b-a)}{80} h^4 f^{(4)}(c)\right|$$

حيث $c \in [x_0, x_{3m}]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: استخدم طريقة سيمبسون على قاعدة ثلاث مجالات جزئية لإيجاد قيمة التكامل المحدد:

$$I = \int_1^2 x \cdot e^x \, dx$$

من أجل $n = 3$ وما هي الخطأ المقطوع الأعظمي.

الحل:

$$n = 3m$$

$$m = \frac{n}{3} = 1$$

$$x_i = a + ih \quad ; \quad i = 0, \dots, n$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$x_0 = a + 0 \cdot h = 1$$

$$f_0 = f(x_0) = e = 2.71828$$

$$x_1 = 1.3333$$

$$f_1 = f(x_1) = 5.05822$$

$$x_2 = 1.66667$$

$$f_2 = 8.82415$$

$$x_3 = 2$$

$$f_3 = 14.77810$$

$$I = S = \frac{3h}{8}\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right]$$

$$\simeq 7.39294$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f^{(4)}(x) = (4+x)e^x$$

$$\max |f^{(4)}(c)| = (4+2)e^2$$

$$c \in [x_0, x_3] = [1,2]$$

$$\Rightarrow \underset{T}{E}(h) \leq \left| -\frac{(2-1)(0.333334)^4 \cdot 6e^2}{80} \right|$$

$$\simeq 0.0006841 4$$

// وظيفة // أعد الكود من أجل $n = 6$

3- تكاملات سيمبسون على قاعدة أربع مجالات جزئية:

بفرض أن $n \bmod 4 \equiv 0$

عندئذ يوجد $m \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون

كتابة $n = 4m$

تكون المجالات الجزئية:

$$[x_0, x_4], [x_4, x_8], \ldots,$$

$$[x_{4m-4}, x_{4m}]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$I = \int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_8} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{4m-4}}^{x_{4m}} f(x)\,dx$$

إنّ $p_i(x)$ هي كثيرات حدود من الدرجة الرابعة تحقق العلاقة $f(x)$ في الخمس نقاط العائمة لكل مجال $i = 1, \ldots, m$ حيث: $[x_{4i-4}, x_{4i}]$

$$p_1(x) = \sum_{j=0}^{4} L_j(x) f_j$$

$$\int_{x_0}^{x_4} p_1(x) = \frac{2h}{45}\left[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4\right]$$

وبالتالي:

$$I = S = \frac{2h}{45}\sum_{i=1}^{m}\left[7f_{4i-4} + 32f_{4i-3} + 12f_{4i-2} + 32f_{4i-1} + 7f_{4i}\right]$$

خطأ مقطع:

$$E_T(h) = \left|\frac{-(b-a)}{945} h^6 f^{(6)}(c)\right|$$

$c \in [a,b] = [x_0, x_{4m}]$ ؛

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: استخدم طريقة سيمبسون على قاعدة 4 لحالات جزئية

لحساب قيمة التكامل المحدد:

$$\int_1^2 x^2 L_n(x)\, dx$$

من أجل $n=4$

واحسب الخطأ المقترف الأعظمي:

الحل:

$n=4m$ و $n=4 \Rightarrow m=1$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{4}=0.25$$

$x_i = a+ih$ ، $i=0,1,\dots,4$

$x_0 = 1 = a$

$f_0 = 0$

$x_1 = 1+h = 1.25$

$f_1 = 0.348662$

$x_2 = 1+2h = 1.5$

$f_2 = 0.912296$

$x_3 = 1.75$

$f_3 = 1.713820$

$x_4 = 1+4h = 2$

$f_4 = 2.77259$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$S = \frac{2h}{45}\left[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4\right]$$

$$\simeq 1.07061$$

$$E_T(h) = \left|\frac{-(b-a)}{945} h^6 f^{(6)}(c)\right|$$

; $c \in [a,b] = [1,2]$

$$f^{(6)}(x) = \frac{-12}{x^4}$$

$$\max\left|f^{(6)}(x)\right| = \max\left|\frac{-12}{(1)^4}\right| = 12$$

; $x \in [1,2]$

$$E_T(h) \leq \left|\frac{-(2-1)}{945}(0.25)^6 \times 12\right|$$

$$\simeq \text{Error} \; 0.0000031002$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة