كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : **الخامسة** /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

3- طريقة النقطة الثابتة (التكرارات المتتالية) لإيجاد جذور المعادلات غير الخطية:

لنفرض لدينا جملة المعادلات:

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$(2)\quad F(X) = 0$$

$$F = (f_1, \dots, f_n)^T$$

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X = (x_1, \dots, x_n)^T$$

● تعريف الجذر (الحل):

نقول إن الشعاع الحقيقي $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ جذراً (حلاً) لجملة المعادلات (1) أو المكافئة (2) إذا كان:

$$F(\bar{X}) = 0$$

وبديهي $\bar{X}$ صفراً للدالة (أو حلاً أو جذراً)

- ويمكن إعادة كتابة (1) بالشكل:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = l_1(x_1, \dots, x_n) \\ x_2 = l_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = l_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

أو

$$(4)\quad x = L(x)$$

و $L = (l_1, \dots, l_n)^T \quad (L \in \mathbb{R}^n)$

- تعريف النقطة الثابتة:

هي نقطة اصطلحنا على رمزها بـ

$\mathbb{R}^n \ni p = (p_1, \dots, p_n)^T$

تحقق الشروط:

$$(5)\quad \begin{cases} p_1 = l_1(p_1, \dots, p_n) \\ \vdots \\ p_n = l_n(p_1, \dots, p_n) \end{cases}$$

- ملاحظة:

1- إنّ النقطة الثابتة p لجملة المعادلات (3) تحقّق جملة المعادلات (1).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{cases} f_1(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \end{cases}$$

وبالتالي فإنّ p هي حل للمعادلة (1).

2- إنّ إيجاد النقطة الثابتة p للجملة (3) بشكل دقيق ليس متاحاً دائماً بالطرق المعروفة ولهذا سنبحث عن الطرق التقريبية لإيجاد نقطة قريبة من النقطة الثابتة بقدر كافٍ وهذا ما سنراه لاحقاً.

- تعريف تكرارات النقطة الثابتة:

إنّ تكرارات النقطة الثابتة للجملة (3) هي المعادلات التكرارية الآتية:

$$\begin{cases} p_1^{k+1} = f_1(p_1^k, p_2^k, \dots, p_n^k) \\ \vdots \\ p_n^{k+1} = f_n(p_1^k, \dots, p_n^k) \end{cases} \quad (6)$$

$k = 0, \dots, n-1$

$$p^0 = \begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ \vdots \\ p_n^0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

هي نقطة كيفية قريبة من النقطة الثابتة بقدر كافٍ.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- مبرهنة: (تقارب تكرارات النقطة الثابتة)

لنفرض أنّ التوابع:

$$f_i(x) \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

مستمرة في النقطة المجاورة للنقطة الثابتة p

$$p = (p_1, \dots, p_n)^T$$

حيث

- ولنفرض أنّه تمّ اختيار نقطة ابتدائية:

$$p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)^T$$

قريبة من النقطة الثابتة بقدر كافٍ

وتحقّقت المتراجحة الآتية:

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{p^0} + \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{p^0} + \dots + \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{p^0} < 1$$

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{p^0} + \left|\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{p^0} + \dots + \left|\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{p^0} < 1$$

$$\vdots$$

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_{p^0} + \left|\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_{p^0} + \dots + \left|\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_{p^0} < 1$$

عندها تقارب تكرارات النقطة الثابتة المذكورة في العلاقات (6) إلى النقطة الثابتة، أي أنّ:

$$\lim_{k \to \infty} p_1^{k+1} = \lim_{k \to \infty} f_1(p_1^k, \dots, p_n^k) = p_1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim p_n^{k+1} = \lim h_n\left(p_1^k, \dots, p_n^k\right) = p_n$$

$k \to \infty$ $\qquad$ $k \to \infty$

- إن كفاية هذه الطريقة لتكرارات النقطة الثابتة غير ممكنة حاسوبياً لأنّ الاطراف غير معرّفة حاسوبياً.

ولكننا سنكتفي بالتكرار:

$$p^n = \begin{bmatrix} p_1^n \\ \vdots \\ p_n^n \end{bmatrix}$$

الذي يحقق الشرط:

$$\| p^n - p^{n-1} \| < \varepsilon$$

وهو شرط توقف الخوارزمية.

مثال: استخدم طريقة النقطة الثابتة (التكرارات المتتالية) لإيجاد الجذر التقريبي لجملة المعادلات:

$$x - \sin(x+y) = 0$$

$$y - \cos(x-y) = 0$$

علماً أنّ $p^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

وأنّ k سوف تتوقف عن التكرار عندما يحقق الشرط:

$$\| p^n - p^{n-1} \| < 3E-3$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x - \sin(x+y) \\ f_2(x,y) = y - \cos(x-y) \end{cases}$$ المثال:

(3) تعطي إمكانيات كثيرة كتابة جملة المعادلات بالشكل
ولكن من الواضح أنه يمكن إيجادها بالشكل:

$$\begin{cases} x = \sin(x+y) = l_1(x,y) \\ y = \cos(x-y) = l_2(x,y) \end{cases}$$

كتبر مبرهنة التقارب لإثبات تقارب تكرارات النقطة الثابتة
وفق هذا الاختيار:

$$\left|\frac{\partial l_1}{\partial x}\right|_{P^\circ} + \left|\frac{\partial l_1}{\partial y}\right|_{P^\circ} \overset{?}{<} 1$$

$$\left|\frac{\partial l_2}{\partial x}\right|_{P^\circ} + \left|\frac{\partial l_2}{\partial y}\right|_{P^\circ} \overset{?}{<} 1$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial x} = \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial y} = \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial x} = -\sin(x-y)$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial y} = \sin(x-y)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نفوّض $p^0 = (1,1)$

محققة $|\cos(2)| + |\cos(2)| \leq 1$

محققة $|-\sin(2)| + |\sin(0)| \leq 1$

محققة الشروط $\Rightarrow$ الإقتراب متقارب.

- تكرارية النقطة التالية:

$$\begin{cases} p_1^{k+1} = t_1(p_1^k, p_2^k) = \sin(p_1^k + p_2^k) \\ p_2^{k+1} = t_2(p_1^k, p_2^k) = \cos(p_1^k - p_2^k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1^1 = \sin(p_1^0 + p_2^0) = \sin(2) = 0.909297 \\ p_2^1 = \cos(p_1^0 - p_2^0) = \cos(0) = 1 \end{cases}$$

$$\|p^1 - p^0\| = \sqrt{(p_1^1 - p_1^0)^2 + (p_2^1 - p_2^0)^2}$$

$$= 0.090702 > 3E-3$$

$$\begin{cases} p_1^2 = \sin(p_1^1 + p_2^1) = 0.94325 \\ p_2^2 = \cos(p_1^1 - p_2^1) = 0.99589 \end{cases}$$

$$\|p^2 - p^1\| = \quad > 3E-3$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{cases} p_1^3 = \sin(p_1^2 + p_2^2) = 0.93292 \\ p_2^3 = \cos(p_1^2 + p_2^2) = 0.99862 \end{cases}$$

$$\| p^3 - p^2 \| = \sqrt{(p_1^3 - p_1^2)^2 + (p_2^3 - p_2^2)^2} > 3E-3$$

$$\begin{cases} p_1^4 = \sin(p_1^3 + p_2^3) = 0.9356 \\ p_2^4 = \cos(p_1^3 - p_2^3) = 0.99784 \end{cases}$$

$$\| p^4 - p^3 \| = 2.82\ E-3 < 3E-3$$

إذاً p^4 تعطي تقريب لحلة المعادلتين:

$$p^4 = \begin{pmatrix} 0.9356 \\ 0.99784 \end{pmatrix}$$

II. وظيفة:

استخدم طريقة النقطة الثابتة لإيجاد حل تقريبي لحلة المعادلتين:

$$\begin{cases} f_1 = xy + x^2 - 3 = 0 \\ f_2 = xy - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

حالة البدء: $p^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

والمطلوب: $\| p^n - p^{n-1} \| < 0.3$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z