كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

8

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

إيجاد جذور للمعادلات غير الخطية بمتغير واحد:

لتكن لدينا المعادلة غير الخطية

(1) $f(x) = 0$

حيث: $x \in \mathbb{R}$

وكذلك $f(x) \in \mathbb{R}$

حالة غير خطية

قدمنا في التحليل العددي 1 مجموعة من الطرائق لحل المعادلة (1) وهي:

طريقة تنصيف المجال، طريقة نيوتن رافسون،

طريقة التقريبات المتتالية.

• تعريف:

نقول أن المعادلة (1) تأخذ جذراً مضاعفاً m مرة عند $x = r$

إذا تحقق الآتي:

$f(r) = f'(r) = \dots = f^{(m-1)}(r) = 0$

وكان $f^{(m)}(r) \neq 0$

1- طريقة نيوتن رافسون:

تم تطوير طريقة نيوتن رافسون لإيجاد الجذر المضاعف m مرة

وفق القانون التكراري الآتي:

(2) $x_{k+1} = x_k - m \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$

حيث m عدد مرات مضاعفة الجذر.

إذا كان الجذر بسيط تكون $m = 1$

إذا أننا سنكتفي بالجذر التقريبي x_n

الذي يحقق إحدى المعيارين:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

أو

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$

مثال: استخدم طريقة نيوتن رافسون لإيجاد الجذر المضاعف 3 مرات للمعادلة:

$$(\cos x - 1)^3 = 0$$

علماً أنّ: $x_0 = 1$

وأنّ k ستتوقف عن التكرار عندما يتحقق الشرط:

$$|f(x_k)| < 1.E-8$$

الحل:

$$f(x) = (\cos x - 1)^3$$

$$f'(x) = 3(-\sin x)(\cos x - 1)^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$x_{k+1} = x_k - 3\frac{(\cos x_k - 1)^3}{-3\sin x_k (\cos x_k - 1)^2}$$

$$x_1 = x_0 - 3\frac{(\cos x_0 - 1)^3}{-3\sin x_0 (\cos x_0 - 1)^2}$$

$$= 0.453697$$

$$|f(x_1)| = 1.035E-3 > 1.E-8$$

لم يتحقق شرط التوقف

$$x_2 = x_1 - 3\frac{(\cos x_1 - 1)^3}{-3\sin x_1 (\cos x_1 - 1)^2}$$

$$= 0.222875$$

$$|f(x_2)| = 1.513E-5 > 1.E-8$$

$$x_3 = x_2 - 3\frac{(\cos x_2 - 1)^3}{-3\sin x_2 (\cos x_2 - 1)^2}$$

$$= 0.110974$$

$$|f(x_3)| = 2.327E-7 > 1.E-8$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$x_4 = x_3 - 3\frac{(\cos x_3 - 1)^3}{-3\sin x_3(\cos x_3 - 1)^2}$$

$$= 0.\,0.05543$$

$$|f(x_4)| = 3.6E-9 < 1.E-8$$

شرط التوقف محقق

$\Leftarrow$ الجذر التقريبي المطلوب هو

$$x_4 = 0.\,0.05543$$

2 - طريقة هالي:

هي تطوير لطريقة نيوتن رافسون تُعطى بالشكل:

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

بفرض $f(x) \in C^3[a,b]$

مستمرة حتى المشتق الثاني والثالث لنقطة $x_k \in R$ نقطة قريبة بقدر كاف من x

لنشر وفق تايلور الدالة $f(x)$ بجوار النقطة x_k

$$f(x) = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k)$$

$$+ \frac{(x-x_k)^2}{2!}f''(x_k) + \frac{(x-x_k)^3}{3!}f'''(c)$$

$c \in]a,b[$ ؛

لتكن r هي الجذر الدقيق للمعادلة $f(x)=0$

$$0 = f(r) = f(x_k) + (r-x_k) f'(x_k) + \frac{(r-x_k)^2}{2!} f''(x_k) + \frac{(r-x_k)}{3!} f'''(c)$$

بحذف الحدّ الأخير من المعادلة السابقة وتعويض $r = x_{k+1}$ ؛

$$f(x_k) + (x_{k+1}-x_k) f'(x_k) + \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2}$$

$$f''(x_k) = 0 \quad .$$

$$(x_{k+1}-x_k) f'(x_k) + \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} f''(x_k) = -f(x_k)$$

$$(x_{k+1}-x_k)\left[f'(x_k) + \frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k) f''(x_k) \right] = -f(x_k)$$

$$(x_{k+1}-x_k) = \frac{-f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k) f''(x_k)}$$

من قانون نيوتن رافسون :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} - x_k = -m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\Rightarrow (x_{k+1} - x_k) = \frac{-f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{1}{2} m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \cdot f''(x_k)}$$

$$= \frac{-f(x_k) \cdot f'(x_k)}{f'(x_k) \cdot f'(x_k) - \frac{1}{2} m f(x_k) \cdot f''(x_k)}$$

$$= \frac{-f(x_k) \cdot f'(x_k)}{f'^2(x_k) - \frac{m}{2} f(x_k) f''(x_k)}$$

$$= x_{k+1} - x_k$$

★ مانون هالي :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{1}{2} m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} f''(x_k)}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أو $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)\, f(x_k)}{(f'(x_k))^2 - \frac{1}{2} m f(x_k) \cdot f''(x_k)}$

مثال

استخدم طريقة هالي & كاد الجذر التقريبي البسيط للمعادلة

$3x + \sin x - e^x = 0$

علماً أن نقطة البدء الابتدائي $x_0 = 0$

سنكتفي بـ x_n التي تحقق العبارة:

$|f(x_n)| < 1.E-5$

الحل:

$f(x) = 3x + \sin x - e^x$

$f'(x) = 3 + \cos x - e^x$

$f''(x) = -\sin x - e^x$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)\, f'(x_0)}{f'^2(x_0) - \frac{1}{2} m f(x_0) f''(x_0)}$

(الجذر التقريبي البسيط $\Leftarrow$ $m = 1$)

$x_1 = 0 - \frac{(3x_0 + \sin x_0 - e^{x_0})(3 + \cos x_0 - e^{x_0})}{(3 + \cos x_0 - e^{x_0}) - \frac{1}{2}(3x_0 + \sin x_0 - e^{x_0})(-\sin x_0 - e^{x_0})}$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{(-1)(3)}{g_{-\frac{1}{2}(-1)(-1)}} = \frac{3}{\frac{17}{2}} = \frac{6}{17}$$

$$= 0.35294$$

$$|f(x_1)| = 0.018767 > 1.E-5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) f'(x_1)}{f'^2(x_1) - \frac{1}{2} m f(x_1) f''(x_1)}$$

$$= 0.3604216$$

$$|f(x_2)| = 4.26\,E-6 < 1.E-5$$

شرط التوقف محقق.

$\Leftarrow$ x_2 هو الجذر المطلوب.

* إيجاد جذور جملة المعادلات غير الخطية:

لتكن لدينا جملة المعادلات غير الخطية:

$$(3)\quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $i = \overline{1,n}$

$$X = (x_1, \dots, x_n)^T$$

- يمكن إعادة كتابة الجملة (3) بالشكل:

(4) $F(X) = 0 \rightarrow$ (صيغة صغرية)

$$F = (f_1, \dots, f_n)^T ;$$

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

تم استخدام طريقة نيوتن لحل الجملة (3) أو المكافئة (4) بالشكل:

$$X_{k+1} = X_k - W^{-1}(X_k) F(X_k)$$

$$; k = 0, \dots, n-1$$

حيث:

$$W(X) = F'(X)$$

وهي مصفوفة جاكوبي للدالة F.

$$W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبالتالي فإنّ $W^{-1}(X_k)$

هو مقلوب مصفوفة جاكوبي عند $X = X_k$

مثال

استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلّ تقريبي لجملة المعادلتين غير الخطيتين:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = -1 \\ xy + y^2 = 2 \end{cases}$$

مبتدئاً بالحلّ:

$$X^0 = (\underbrace{1}_{x_0}, \underbrace{0.5}_{y_0})^T$$

ومكتفياً بـ X_1

مع حساب قيمة $\| F(X_1) \|$

الحلّ:

$$f_1(x,y) = xy + y^2 - 2$$

$$f_2(x,y) = x^2 - 2xy + 1$$

$$X_1 = X_0 - W^{-1}(X_0)\, F(X_0)$$

$$F(X_0) = \begin{bmatrix} f_1(x_0,y_0) \\ f_2(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 y_0 + y_0^2 - 2 \\ x_0^2 - 2x_0 y_0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y & x+2y \\ 2x-2y & -2x \end{bmatrix}$$

$$W(X_0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det W(X_0) = -1-2 = -3$$

$$W^{-1}(X_0) = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.75 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \begin{bmatrix} 1.16659 \\ 1.08333 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x_1 \\ \rightarrow y_1 \end{matrix}$$

$$F(X_1) = \begin{bmatrix} x_1 y_1 + y_1^2 - 2 \\ x_1^2 - 2x_1 y_1 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.437405 \\ 1.097302 \end{bmatrix}$$

$$\| F(X_1) \| = \sqrt{(0.437405)^2 + (1.097302)^2}$$

$$\simeq 1.181$$

★ من عيوب طريقة نيوتن لإيجاد جذور المعادلات غير الخطية هي أنها تحتاج إلى إيجاد قيم معكوب مصفوفة جاكوبي من أجل كل تكرار $X = X_k$

وهذا يشكل عبء حاسبي كبير ولتخفيف هذا العبء الحسابي وعدد العمليات الكبير، خاصة عندما يكون عدد المعادلات كبيراً جداً

- تم تعديل طريقة نيوتن لتصبح كالتالي:

$$X_{k+1} = X_k - W(X_0)^{-1} F(X_k)$$

$$; \quad k = 0, \ldots, n-1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وتسمّى طريقة نيوتن المعدّلة.

في هذه التكرارية (X_{k+1}) سيتمّ حساب معكوس مصفوفة جاكوبي مرّة واحدة عند $X=X_0$

ويثبّت هذا المعكوس في جميع التكرارات التالية.

مثال:

استخدم طريقة نيوتن المعدّلة لإيجاد حلّ تقريبي لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} xy + x^2 = 3 \\ xy + y = 4 \end{cases}$$

مع الاكتفاء بحلّ X_2

مستخدماً

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

الحلّ:

$$f_1(x,y) = xy + x^2 - 3$$
$$f_2(x,y) = xy + y - 4$$

$$X_1 = X_0 - W(X_0)^{-1} F(X_0)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y + 2x & x \\ y & x + 1 \end{bmatrix}$$

$$W(X_0) = \begin{bmatrix} 4.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$|W(X_0)| = 9$$

$$W(X_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.27778 & -0.16667 \\ -0.16667 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$F(X_0) = \begin{bmatrix} x_0 y_0 + x_0^2 - 3 \\ x_0 y_0 + y_0^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1.04167 \\ 1.875005 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$F(X_1) = \begin{bmatrix} 0.038194 \\ -0.171875 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = X_1 - W^{-1}(X_0) F(X_1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0024 \\ 1.96730 \end{bmatrix}$$

$$F(X_2) = \begin{bmatrix} -0.02312 \\ -0.0605 \end{bmatrix}$$

$$\|F(X_2)\| = 0.064908$$

انتهت

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة