كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

* استيفاء هرميت التكعيبي:

هو تقريب دالة $f(x)$ حيث $f \in C^1[a,b]$ بكثيرة حدود من الدرجة الثالثة نرمز لها $H_3(x)$.

إن كثيرة الحدود $H_3(x)$ تتطابق مع الدالة $f(x)$ هي ومشتقاتها الأولى في النقطتين $x_0, x_1 \in [a,b]$ حيث $x_0 \neq x_1$.

وتتحقق بشروط الاستيفاء التالية:

شروط استيفاء هرميت:

$$\begin{cases} H_3(x_k) = f(x_k) \ ; \ k=0,1 & (1) \\ H_3'(x_k) = f'(x_k) \ ; \ k=0,1 & (2) \end{cases}$$

تكتب كثيرة حدود هرميت التكعيبية بالشكل التالي:

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) f'_j \quad (*)$$

حيث: $S_j(x)$ و $R_j(x)$ هي كثيرات حدود من الدرجة الثالثة:

$$S_j(x) = [1 - 2(x - x_j) l'_j(x_j)] l_j^2(x)$$

$$R_j(x) = (x - x_j) l_j^2(x)$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

إثبات $S_j(x)$ و $R_j(x)$ تحققان الخاصة التالية:

$$S_j(x_k) = \begin{cases} 1 & ; j = k \\ 0 & ; j \neq k \end{cases} \quad (2)$$

$$S'_j(x_k) = 0 \quad \forall k, j$$

$$R_j(x_k) = 0 \quad \forall k, j$$

$$R'_j(x_k) = \begin{cases} 1 & ; j = k \\ 0 & ; j \neq k \end{cases}$$

الآن سنثبت أن كثيرة الحدود ⊛ تحقق شرط الوحدانية (1):

$$H_3(x_k) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x_k) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x_k) f'_j$$

$$= S_k(x_k) f_k \quad (2) \text{ حسب} \quad = f_k$$

$$H'_3(x_k) = \sum_{j=0}^{1} S'_j(x_k) f_j + \sum_{j=0}^{1} R'_j f'_j$$

$$= R_k(x_k) f'_k \quad (2) \text{ حسب} \quad = f'_k$$

بما أن هذا البرهان تحقق مما أن كثيرة الحدود ⊛ وحيدة.

* الخطأ المرتكب في ⊛ (كثيرة حدود هرميت):

$$E(x) = |H_3(x) - f(x)|$$

إن $x_0$ و $x_1$ هي عقد المفاضلة لـ $x$ وحسب خواص التباين

$$\frac{E}{T}(x) = \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{4!} f^{(4)}(c)$$

الحدود تكون:



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

; $c \in [x_0, x_1]$

مثال: أوجد أدنى درجة ممكنة هي صيغة التكعيبة التقريبية للدالة

في النقطتين $x_1 = 1$ و $x_0 = 0$

ما هي قيمة تقريبية للدالة عند $x = \frac{1}{2}$

ما هي الدالة المقطع الأعظمي

$$f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$$

الحل:

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = 0$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$$

$$f'_0 = -1$$

$$f'_1 = 0$$

$$H_3(x) = S_0(x) f_0 + S_1(x) f_1 + R_0(x) f'_0 + R_1(x) f'_1$$

| $x_i$ | $x_0 = 0$ | $x_1 = 1$ |
|---|---|---|
| $y_i = f_i$ | $f_0 = 1$ | $f_1 = 0$ |
| $y'_i = f'_i$ | $f'_0 = -1$ | $f'_1 = 0$ |

$$H_3(x) = S_0(x) - R_0(x)$$

$$\text{(*)} \quad S_0(x) = [1 - 2(x - x_0) L'_0(x_0)] L_0^2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1}{0 - 1} = 1 - x$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$L_0'(x) = -1$

$L_0'(x_0) = L_0'(0) = -1$

$\Rightarrow S_0(x) = (1+2x)(1-x)^2$

(*) $R_0(x) = (x-x_0)\,L_0^2(x) = x(1-x)^2$

$\Rightarrow H_3(x) = (1+2x)(1-x)^2 + x(1-x)^2$

$= x^3 - x^2 - x + 1$

$H_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 0.375$

الخطأ المقطع :

$$E_T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}{4!} f^{(4)}(c)$$

$c \in [0,1]$

$f^{(4)} = 24 = 4!$

$$\Rightarrow E_T\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} = 0.0625$$

الخطأ المطلق $S = \left|H_3\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$

$= |0.375 - 0.4375|$

$= 0.0625$

" ملاحظة "

أوجد كثيرة حدود هرميت الموافقة في الجدول التالي واحسب قيمة تقريبية لها عند $x = \frac{1}{2}$ .

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y_i = f_i$ | 0 | 1 |
| $y_i' = f_i'$ | -1 | 4 |



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* استيفاء هيرميت التكعيبي الشرائحي:

هو استيفاء لدالة بتتالية من كثيرات حدود هيرميت التكعيبية تعرف كل كثيرة حدود من هذه المتتالية بشرائحية.

رياضياً:

لتكن الدالة $f$ تنتمي لكثيرات الحدود $C^1[x_0, x_n]$ $(f \in C^1[x_0, x_n])$

$\{x_k\}_{k=0}^{n}$ هي متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة.

معلم الدالة معلومة في المجال $[x_0, x_n]$.

نأخذ التجزئة للمجال $[x_0, x_n]$:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

لدينا $n$ مجال جزئي فوق كل مجال نوجد شرائحية.

سوف تكتب الدالة $P(x)$ بشرائحية تكعيبية هيرميت كالتالي:

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x) & ; x \in [x_0, x_1] \\ H_2(x) & ; x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ H_i(x) & ; x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \vdots \\ H_n(x) & ; x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$H_i(x)$ هي كثيرات حدود هيرميت التكعيبية تحقق الخواص الآتية:

على المجال $[x_{i-1}, x_i]$

$$\begin{cases} H_i(x_{i-1}) = f_{i-1} \\ H_i'(x_{i-1}) = f'_{i-1} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$H_i(x_i) = f_i \quad , \quad H_i'(x_i) = f'_i$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$H_1(x) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) f'_j \quad \text{حيث :}$$

$$H_2(x) = \sum_{j=1}^{2} S_j(x) f_j + \sum_{j=1}^{2} R_j(x) f'_j$$

$$\vdots$$

$$H_i(x) = \sum_{j=i-1}^{i} S_j(x) f_j + \sum_{j=i-1}^{i} R_j(x) f'_j$$

حيث خصائص : $S_j$ و $R_j$

$$\text{(*)} \quad S_j(x_i) = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

$$S'_j(x_i) = 0 \quad \forall i, j$$

$$\text{(*)} \quad R_j(x_i) = 0 \quad \forall i, j$$

$$R'_j(x_i) = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

مثال: أوجد استيفاء هيرميت الذي التكعيبي للدالة المعرفة بالجدول التالي :

| $x_i$ | $x_0 = 0$ | $x_1 = 1$ | $x_2 = 2$ |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | $f_0 = 1$ | $f_1 = 0$ | $f_2 = 4$ |
| $y'_i$ | $f'_0 = -2$ | $f'_1 = 1$ | $f'_2 = 8$ |

الحل:

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x) & ; x \in [0,1] \\ H_2(x) & ; x \in [1,2] \end{cases}$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$H_1(x) = \sum_{j=0}^{1} S_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} R_j(x) f'_j$$

$$= S_0(x) f_0 + S_1(x) f_1 + R_0(x) f'_0 + R_1(x) f'_1$$

$$= S_0(x) - 2R_0(x) + R_1(x)$$

$$S_0(x) = [1 - 2(x - x_0) L'_0(x_0)] L_0^2(x)$$

$$L_0(x) = 1 - x$$

$$L'_0(x_0) = -1$$

$$\Rightarrow S_0(x) = (1 + 2x)(1 - x)^2$$

$$R_0(x) = (x - x_0) L_0^2(x) = x(1 - x)^2$$

$$R_1(x) = (x - x_1) L_1^2(x) = x^2(x - 1)$$

$$\Rightarrow H_1(x) = (1 + 2x)(1 - x)^2 - 2x(1 - x)^2 + x^2(x - 1)$$

$$= x^3 - 2x + 1$$

; $x \in [0, 1]$

$$H_2(x) = 4S_2(x) + R_1(x) + 8R_2(x)$$

$$S_2(x) = (5 - 2x)(x - 1)^2$$

$$R_1(x) = (x - 1)(2 - x)^2$$

$$R_2(x) = (x - 2)(x - 1)^2$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow H_2(x) = x^3 - x^2$$

$$\Rightarrow H(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & ; x \in [0,1] \\ x^3 - x^2 & ; x \in [1,2] \end{cases}$$

$H_1(1) = 0$

$H_2(1) = 0$

ملاحظة:

في نقاط الاتصال تكون كثيرة حدود هي مجموع الـ $n$ الأولى متساوية.

- القيمة التقريبية لـ $x = \frac{1}{2}$ :

$H_1(\frac{1}{2}) = 0.125$

- القيمة التقريبية لـ $x = 1.5$ :

$H_2(1.5) = 1.125$

انتهت



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z