كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

- التقريبات الدوال لكثيرات الحدود:

تعرّفنا سابقاً على تقريبات الدوال لكثيرات حدود الاستيفاء الداخلي (لاغرانج - نيوتن ...)

وتقريبات المربعات الصغرى

وعلى الرغم من أهمية هذه التقريبات إلّا أنها تتسم ببعض المزايا السلبية نذكر منها:

1- إن كثيرات حدود الاستيفاء ترتبط درجتها بعدد النقاط وبالتالي فإنّ زيادة عدد النقاط يؤدي للحصول على كثيرات حدود من درجات عالية وهذه الكثيرات الحدود تعاني من بعض الانحرافات الكبيرة عن الدالة الأصلية في بداية ونهاية مجال الاستيفاء $[x_0, x_n]$

2- الحصول على تقريبات المربعات الصغرى يحتاج الحل جملة معادلات خطية من المعاملات المجهولة $d_0, d_1, \dots, d_n$ (لكثيرة الحدود) مصفوفتها معتلة الشرطية والحصول عليها يحتاج جهد حسابي كبير وفي هذه الدراسة سندخل مفهومين أساسيين هما التوزين وكثيرات الحدود المتعامدة.

1 التوزين:

نستخدم عادةً أعداد موجبة $\{w_i\}_{i=0}^{n}$ عددها يساوي عدد نقاط المعطيات

ويتضمن أيضاً مجموعة من الدوال الموجبة والقابلة للمكاملة على المجال المتضمم

تسمى الأعداد الموجبة $\{w_i\}_{i=0}^{n}$ "أوزان"

والدوال تسمى دوال الوزن $(w(x))$

إن زيادة التوزين عند النقاط التي تخرج عن الدالة يساهم في جذب هذه النقاط باتجاه الدالة يؤدي إلى تحسين التقارب

• أمثلة:

① من دوال الوزن:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x \to \mp 1} w(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} w(x) = 1$$

② $$w_i(x) = \frac{1}{|x - x_i|}$$

$$\lim_{x \to x_i} w(x) = \infty$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2) الدوال المتعامدة:

توجد عدة أنواع من الدوال الخاصة هي دوال متعامدة تستخدم في تطبيقات كثيرة نذكر منها:

كثيرة حدود تشيبتشيف - ليجندر - هرميت

تعريف:

نقول عن دالتين $f(x)$ و $g(x)$ معرفتين ومستمرتين على المجال $[a,b]$ أنهما متعامدتان فوق المجال إذا تحقق ما يلي:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = 0$$

وبشكل عام من أجل مجموعة من الدوال

$$\{f_i(x)\} \qquad i = 0, 1, \dots$$

معرفة ومستمرة فوق المجال $[a,b]$

نقول أنها متعامدة متنى متن بالنسبة لـ دالة الوزن $w(x)$ إذا تحقق ما يلي:

$$\int_a^b w(x)\, f_i(x) \dots f_j(x)\, dx \quad ; \quad i,j = 0,1,\dots \quad i \neq j$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \ i \neq j \\ \lambda_i & ; \ i = j \end{cases}$$ حالة التعامد

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وهذا في الحالة المستمرة

- في الحالة المنفصلة تكون من أجل n+1
من النقاط المختلفة x_k

$k = 0, 1, \dots, n$

يتحول التكامل إلى مجموع:

$$\sum_{k=0}^{n} w_k f_i(x_k) \cdot f_j(x_k)$$

$$= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \lambda_i & i = j \end{cases}$$ حالة التعامد

حيث w_k الأوزان (أعداد موجبة)

- كثيرات حدود تشيبيشيف:

نعرّف كثيرة حدود تشيبيشيف من الدرجة n رياضياً كالآتي:

$$T_n(x) = \cos[n \cdot \cos^{-1}(x)]$$

$n = 0, 1, \dots$

$x \in [-1, 1]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$n=0 \quad T_0(x) = 1$

$n=1 \quad T_1(x) = x$

★ نفرض أنّ:

$$\theta = \cos^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow x = \cos\theta$$

$$\Rightarrow T_n(x) = \cos n\theta$$

$n=2 \quad T_2(x) = \cos 2\theta$

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos 3\theta$$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$= 4x^3 - 3x$$

يمكن الحصول على حدوديات تشيبشيف من مراتب أعلى بالاعتماد على خواصها

- خواص كثيرات حدود تشيبشيف:

1) إنّ كثيرات حدود تشيبشيف تحقق العلاقة التكرارية:

$$T_{n+1}(x) - 2x\,T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad ; \quad n \geq 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الإثبات :

إن هذه العلاقة صحيحة لأن العلاقة الآتية صحيحة :

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta$$

$$= 2\cos\theta \cdot \cos\theta$$

حيث :

$$T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta$$

$$T_n(x) = \cos n\theta$$

$$x = \cos\theta$$

نعوض في العلاقة ويتحقق المطلوب .

ملاحظة :

يمكن استخدام هذه الخاصة للحصول على صيغ مباشرة لتمثيل كثير حدود من مرتبة أعلى بدلالة الحدودين السابقين لها .

$$n=4 \quad T_4(x) = 2x\,T_3(x) - T_2(x)$$

$$= 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1)$$

$$= 8x^4 - 8x^2 + 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$n=5$ $T_5(x) = 2x\,T_4(x) - T_3(x)$

$= 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - 4x^3 + 3x$

$= 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 - 3x$

$= 16x^5 - 20x^3 + 5x$

2) $T_{2i}(x)$

دالة زوجية لأنها مجموع لقوى x الزوجية

$T_{2i+1}(x)$ دالة فردية لأنها مجموع لقوى x الفردية

3) $|T_n(x)|$

حيث $-1 \le x \le 1$

لأن $\cos n\theta = T_n(x)$

$|\cos n\theta| \le 1$

$-1 \le \cos n\theta \le 1$

$x = \cos\theta$ ،

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4) إن صفريات $T_n(x)$ تتمتع بـ n جذراً حقيقياً مختلفاً في المجال $[-1,1]$ تحسب بالعلاقة:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

$$k = \underbrace{0, \dots, n-1}_{n}$$

الإثبات:

$$T_n(x) = 0$$

$$\cos n\theta = 0$$

$$\star \quad n\theta_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

نضع $x = \cos\theta$

$$\star \Rightarrow \theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$$

$$\Rightarrow x_k = \cos\theta_k$$

$$= \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

$x_n = x_{n-1}$ $\quad x_{n+1} = x_{n-2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال

جذور $T_5(x)$

$K=0 \quad x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$= 0.951056$

$K=1 \quad x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 0.58778$

$K=2 \quad x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 0$

$K=3 \quad x_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) = -0.58778$

$K=4 \quad x_4 = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) = -0.951056$

للتأكد من أنه عدد الجذور لن يزيد عن 5

$x_5 = \cos\left(\frac{11\pi}{10}\right) = -0.951056$

$x_6 = \cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) = -0.58778$

5 إن متعددات تشيبيتشيف متعامدة متنظمة بالنسبة إلى دالة الوزن: $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فوق المجال $[-1,1]$

حيث:

1) الحالة المتقطعة:

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, T_i(x)\, T_j(x)\, dx$$

$$= \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ \pi & ; i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; i = j \neq 0 \end{cases}$$ (دالة التعامد)

الإثبات:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{T_i(x)\, T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$x \longleftarrow [-1,1]$

$\theta \longleftarrow [0,\pi]$

نفرض $x = \cos\theta$

$dx = -\sin\theta\, d\theta$

$$I = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos i\theta \cos j\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} (-\sin\theta\, d\theta)$$

$$= +\int_{0}^{\pi} \cos(i\theta)\, \cos(j\theta)\, d\theta$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(i+j)\theta + \cos(i-j)\theta]\, d\theta$$

نميز ثلاث حالات :

1] $i \neq j$ (التعامد)

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(i+j)\theta}{i+j} + \frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} \right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow I = 0$$

2] $i = j = 0$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1+1)\, d\theta = [\theta]_0^{\pi} = \pi$$

3] $i = j \neq 0$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(2i\theta) + 1]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2i\theta)}{2i} + \theta \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

2 في الحالة المتصلة :

إيجاد صفوريات تشبيبيف متعامدة $T_{n+1}(x)$ متعدد حدود

في أصفار الصفوريّة :

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وعدد النقاط $n+1$ مختلفة.

$$\sum_{k=0}^{n} T_i(x_k)\, T_j(x_k)$$

$$= \begin{cases} 0 & ; i \neq j \quad (\text{التعامد}) \\ n+1 & ; i = j = 0 \\ \frac{n+1}{2} & ; i = j \neq 0 \end{cases}$$

- لا تُستخدم أصفار تشيبيشيف لأنّ أصفار تشيبيشيف كلّ محلّها.

- تقريبات تشيبيشيف:

في الحالة المستمرة:

لتكن $f(x)$ معرّفة ومستمرة في المجال $[-1,1]$

ولتكن:

$$p_m(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \cdots + a_m T_m(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} a_i T_i$$

كثيرة حدود من الدرجة m

$\{T_i\}_{i=0}^{m}$ كثيرات حدود تشيبيشيف، ولتكن:

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ دالة وزن

إنّ تقريب تشيبيشيف للدالة $f(x)$ بكثيرة الحدود $p_m(x)$ تُعطى بالمعيار الآتي:

$$\| f(x) - p_m(x) \|_2^2 = \text{Min} \int_{-1}^{1} w(x) [f(x) - p_m(x)]^2 dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إنّ حلّ هذه المسألة يؤول إلى إيجاد الحلّ الأمثل بتعيين المعاملات المجهولة $a_0, a_1, \dots, a_m$

لذلك وحسب ما سبق نفرض أنّ:

$$E(a_0, \dots, a_m) = \int_{-1}^{1} w(x)\,[f(x) - p_m(x)]^2\,dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 \quad ; \quad i = 0, \dots, m$$

$$\Rightarrow \text{(*)} \quad -2 \int_{-1}^{1} w(x)\,[f(x) - p_m(x)]\,T_i(x)\,dx = 0$$

حيث:

$$E(a_0, \dots, a_m) = \int_{-1}^{1} w(x)\,[f(x) - a_0 T_0(x) - \dots - a_i T_i(x) - \dots - a_m T_m(x)]^2\,dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = -2 \int_{-1}^{1} w(x)\,[f(x) - a_0 T_0(x) - \dots - a_i T_i(x) - \dots - a_m T_m(x)]\,T_i(x)\,dx$$

$$\text{(*)} \Rightarrow \int_{-1}^{1} w(x) f(x) T_i(x)\,dx = \int_{-1}^{1} w(x) p_m(x) T_i(x)\,dx = 0$$

بسبب خاصة التعامد في الحالة المتمثلة نحصل على:

$$\int_{-1}^{1} w(x) f(x) T_i(x)\,dx = a_i \int_{-1}^{1} w(x) T_i(x) T_i(x)\,dx = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$a_i = \frac{\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, T_i(x)\, dx}{\int_{-1}^{1} w(x)\, T_i^2(x)\, dx}$$

مشتقة من خاصة التعامد.

أما عندما $\Leftarrow$ $\boxed{i=j=0}$

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, T_0(x)\, dx}{\int_{-1}^{1} w(x)\, T_0^2(x)\, dx}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx \qquad (1)$$

وعندما $\Leftarrow$ $\boxed{i=j\neq 0}$

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} w(x)\, T_i(x)\, f(x)\, dx \qquad (2)$$

إن خواص التعامد حوّلت مسألة الحل من جملة معادلات خطية صيغتها من الدرجة $m+1$ إلى علاقة خطية بسيطة كما في (1) و (2).

ملاحظة:

إن كثيرات حدود تشيبيشيف معرّفة فقط فوق المجال $[-1,1]$ لكن نستطيع إيجاد هذه التقريبات لأية دالة $f(x)$ فوق مجال ما $[a,b]$ وذلك بتحويله بتغيير المتحوّل إلى المجال $[-1,1]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وهذا التحويل من مجال إلى مجال يحقق العلاقة:

$[a,b] \longrightarrow [-1,1]$

التحويل:

$x \in [a,b]$

$t \in [-1,1]$

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

مثال: $f(x) = x^2$ على المجال $[a,1]$ ↓ $[a,b]$

الحل:

نعيّن المحوّل إلى المجال $[-1,1]$

$$x = \frac{1-0}{2}t + \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(t+1)^2$$

مثال: لتكن لدينا دالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

والمطلوب إيجاد تقريبات من الدرجة الأولى والثانية من الخطية

$(p_1(x) \longrightarrow p_4(x))$ إلى $p_4(x)$

في المجال $[-1,1]$

الحل: $p_1(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x)$

$T_0(x) = 1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$T_1(x) = x$$

$$\Rightarrow p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{\pi} [x]_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi}$$

$$= 0.63662$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} w(x)\, f(x)\, T_1(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$$

$$\Rightarrow p_1(x) = 0.63662 + 0.x$$

$$p_2(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$$

$$= p_1(x) + a_2 T_2(x)$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} w(x) f(x) T_2(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (2x^2 - 1)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[2\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-2}{3} = -0.424413$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 0.63662 - 0.424413(2x^2 - 1)$$

$$= 1.0603 - 0.848826\, x^2$$

مثال

$$f(t) = (t-1)\sqrt{2t - t^2}$$

معرّفة على $[0,2]$

أوجد تقريب تربيعي؟

انتهت

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة