كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الثانية عشر /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مثال: $X = \sqrt{2}$

$\beta = \sqrt{5}$

والمطلوب: 1- أوجد $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$

2- أثبت أنّ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

3- أوجد $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})]$

4- أوجد $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$

واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ فوق $\mathbb{Q}$.

الحل: طلب الأول:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = \deg(\sqrt{5}, \mathbb{Q})$$

نوجد كثيرة الحدود الأصغرية للعنصر

$\beta = \sqrt{5}$

فوق $\mathbb{Q}$ نلاحظ أنّ

$$irr(\beta, \mathbb{Q}) = x^2 - 5$$

$$\deg(\sqrt{5}, \mathbb{Q}) = \deg(irr(\sqrt{5}, \mathbb{Q}))$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$$

والقاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ فوق $\mathbb{Q}$:

$$\{1, \sqrt{5}\}$$

$\mathbb{Q}\sqrt{5} = \{a.1 + b.\sqrt{5} ;\ a,b \in \mathbb{Q}\}$

المطلب الثاني: نفرض جدلاً $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

$\sqrt{2} = a + b\sqrt{5}$; $a,b \in \mathbb{Q}$

$a = \sqrt{2} - b\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$

وهذا مرفوض

بالتالي الفرض الجدلي خاطئ عندئذ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

المطلب الثالث:

$$\left[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})\right]$$

$$= \left[\mathbb{Q}(\sqrt{5})(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})\right]$$

لنوجد: $irr(\sqrt{2}, \mathbb{Q}\sqrt{5})$

نلاحظ بأن $\sqrt{2}$ جذر لـ

$$p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})[x]$$

و $p(x)$ موحدة لأن $a_2 = 1$

$p(x)$ لا تحلل في $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ لأن $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ لا تحوي جذري $p(x)$ علماً أن جذريها $\pm\sqrt{2}$.

أي كثيرة حدود تكون قابلة للاختزال عندما تحلل جذورها في هذا الحقل

$$irr(\sqrt{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{5})) = x^2 - 2$$

$$\deg(\sqrt{2}, \mathbb{Q}(\sqrt{5})) = 2$$

$$\left[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})\right] = 2$$

والقاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$ فوق $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ هي $\{1, \sqrt{2}\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الطلب الرابع:

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$

$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

$\mathbb{Q}$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{5})(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] \times [\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$$

$$= 2 \times 2 = 4$$

والقاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ فوق $\mathbb{Q}$ هي:

$$\{1, \sqrt{2}\} \times \{1, \sqrt{5}\}$$

$$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \{c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{5} + c_3\sqrt{10} \;;\; c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Q}\}$$

اي عنصر مثلاً كيف يعني أي طلب هيك عناصر الحقل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: يقال عن الحقل F أنه مغلق جبرياً إذا كانت كل كثيرة حدود غير ثابتة في $F[x]$ تحلل جذر في F.

مثال 1: $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسرية غير مغلق جبرياً لأنه توجد

$$P(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$$

لا تحلل جذر في $\mathbb{Q}$.

مثال 2: $\mathbb{R}$ حقل الأعداد الحقيقية هو حقل غير مغلق جبرياً لأنه توجد

$$P(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{R}[x]$$

مثال 3: $Z_3 = \{0,1,2\}$ حقل، هو غير مغلق جبرياً لأنه توجد

$$P(x) = x^2 + 1 \in Z_3[x]$$

بحيث لا تحلل جذر في Z_3.

مثال 4: $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المعقدة هو حقل مغلق جبرياً

ملاحظة: أي E توسيع حقلي لـ F عندئذ $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حيث $x_1, x_2, \dots, x_n$ عناصر جبرية فوق F توسيع جبري لـ F.

برهنة هامة: ليكن E توسيع حقلي لـ F (E_1 / F)

عندئذ:

$$\bar{F} = \{a ; a \in E \text{ و } a \text{ عنصر جبري فوق } F\}$$

و $F \subseteq \bar{F}$

لإثبات: $\bar{F} \neq \phi$ نلاحظ بأنه $0 \in \bar{F}$:

$$0 \in E \text{ و } \exists\, P(x) = x \in F[x] \; ; \; P(0) = 0$$

$\Leftarrow$ 0 عنصر جبري فوق F

نلاحظ بأنه $1 \in \bar{F}$.

$$1 \in E \text{ و } \exists\, P(x) = x - 1 \in F[x]$$

$$P(1) = 0$$

$\Leftarrow$ 1 عنصر جبري فوق F $\boxed{1 \in \bar{F}}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* $E \supseteq \bar{F} \neq \emptyset$

$\forall a,b \in \bar{F} \overset{?}{\Rightarrow} a-b \in \bar{F}$

$a \in E$ عنصر جبري فوق F

$b \in E$ عنصر جبري فوق F

$F(a,b) \subseteq E$ توسيع جبري لـ F حينئذ

$a,b \in F(a,b)$

$a-b \in F(a,b)$

$\Rightarrow a-b$ عنصر جبري فوق F

نلاحظ: $a-b \in E$ و $a-b$ عنصر جبري فوق $F \Leftarrow a-b \in \bar{F}$

* $\forall a,b \in \bar{F} \Rightarrow ab^{-1} \in \bar{F}$

$a \neq 0$

$a \in E$ عنصر جبري فوق F

$b \in E$ و F عنصر جبري فوق b

$F(a,b) \subseteq E$ توسيع جبري لـ F.

$ab^{-1} \in F(a,b) \Leftarrow \begin{cases} a,b \in F(a,b). \\ b^{-1} \in F(a,b). \end{cases}$

أصبح لدينا $ab^{-1} \in E$ و ab^{-1} عنصر جبري فوق F حينئذ

$ab^{-1} \in \bar{F}$

نستنتج مما سبق أن $\bar{F}$ حقل.

$\forall a \in F \; \exists p(x) = x-a \in F[x]$. $\Rightarrow E \subseteq \bar{F}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$P(a) = 0$

نلاحظ أن العنصر $a \in F \subseteq E$ و a عنصر جبري فوق F

$a \in \bar{F}$

$\Rightarrow F \subseteq \bar{F}$

ملاحظة:

~~~ إذا كان E توسيع حقلي لـ F عندئذ نعرف المجموعة

$\bar{F} = \{ a : x \in E \}$ عنصر جبري فوق F

بالعلاقات الجبرية للحقل F في الحقل E.

هام أكاديمي:

~~~

مفهوم التفريق (الأنظار):

تعريف: E توسيع حقلي لـ F

$f(x) \in F[x]$

* يقال عن كثيرة الحدود $f(x)$ بأنها تتفرق فوق الحقل E إذا أمكن كتابة كثيرة الحدود $f(x)$ على شكل جداء عوامل خطية في $E[x]$ أي إذا أمكن كتابة $f(x)$ في $E[x]$ على الشكل التالي.

$f(x) = \lambda (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$

حيث $a_1, a_2, \ldots, a_n \in E$ ، $\lambda \in F$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* يقال عن الحقل E بأنه حقل تفريق لكثيرة الحدود $f(x)$ فوق F إذا كانت كثيرة الحدود $f(x)$ تتفرق في الحقل E ولا تتفرق في أي حقل آخر K حقق $F \subseteq K \subsetneq E$

ملاحظة:

ليكن F حقل، $f(x) \in F[x]$ عندئذ

إن حقل التفريق لكثيرة الحدود $f(x)$ فوق الحقل F هو أصغر حقل تتفرق فيه كثيرة الحدود $f(x)$ فوق F

ملاحظة: الحصول على حقل تفريق كثيرة الحدود $f(x)$ فوق F، نضم أصفار كثيرة الحدود $f(x)$ إلى الحقل F أي هو:

$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ حيث $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ أصفار كثيرة الحدود $f(x)$.

* * * *

أمثلة: ليكن $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$

أوجد حقل تفريق لـ $f(x)$ فوق $\mathbb{Q}$.

الحل:

$f(x)$ متفرق في $\mathbb{R}$ والذي يحوي الحقل $\mathbb{Q}$ على الشكل

$f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

بينما حقل التفريق لكثيرة الحدود $f(x)$ فوق الحقل $\mathbb{Q}$ هو الحقل

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q} \}$

وذلك لأن

$f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$

(i) هل تحليل لـ $f(x)$ فوق $\mathbb{Q}$ هي

أثبت الحافظة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z