كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : **الحادية عشر /نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

ندرس في البرهنة التالية الحقل $F(x)$ حيث α عنصر جبري فوق F.

برهنة: E توسيع متناهي لـ F.

$\alpha \in E$ عنصر جبري فوق F.

$\deg(\alpha, F) = n \geq 1$ ((درجة العنصر α فوق F)).

بالتالي: 1- القاعدة لـ $F(x)$ فوق F هي $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$

2- $[F(x) : F] = \deg(\alpha, F) = n$.

3- $F(x) = \{c_0 \cdot 1 + c_2\alpha + c_3\alpha^2 + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$

$c_i \in F \quad \forall 0 \leq i \leq n-1\}$

مثال: أوجد $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}]$ واستنتج قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ فوق $\mathbb{Q}$

الحل:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = \deg(\sqrt[3]{3}, \mathbb{Q})$$

لنوجد $\deg(\sqrt[3]{3}, \mathbb{Q})$:

لنوجد كثيرة الحدود الأصغرية للعنصر $\alpha = \sqrt[3]{3}$ فوق الحقل $\mathbb{Q}$

نلاحظ أن $\alpha = \sqrt[3]{3}$ جذر لـ $P(x) = x^3 - 3$ (درجته 3)

و $f(x)$ مجهولة لأن أفضل المعامل الرئيسي تساوي 1

نلاحظ أن $f(x)$ غير قابلة للتحليل فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار أيزنشتاين من أجل العدد الأولي $p = 3$

$\Leftarrow$ نستنتج أن $\deg(\sqrt[3]{3}, \mathbb{Q}) = 3$ وبالتالي $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 3$ $\Leftarrow$

$x = \sqrt[3]{3}$
$x^3 = 3$
$x^3 - 3 = 0$

* القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ فوق $\mathbb{Q}$ هي:

$$\{1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}\} = \{1, 3\sqrt{3}, (\sqrt[3]{3})^2\}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) = \{c_0 + c_1\sqrt[3]{3} + c_2\sqrt[3]{9} ; c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}$$

* * * * * * *

مثال: أوجد $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$ وأكتب القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ فوق $\mathbb{Q}$

الحل:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = \deg(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$$

لنوجد $\deg(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$:

لنوجد كثيرة الحدود الأصغرية للعنصر $\alpha = \sqrt{2}$ فوق $\mathbb{Q}$: $P(x) = x^6 - 2$

① بأن α جذر لـ $P(x)$.

② أن $P(x)$ معقدة كاين: $a_6 = 1$

③ $P(x)$ كثيرة لا تحلل فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار [redacted] الذي ينص بأحد الحدود الأولي $p = 2$

$$\Leftarrow \deg(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 6$$

$$\Leftarrow [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 6$$

* القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ فوق $\mathbb{Q}$ هي:

$$= \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5\}$$

$$= \{1, 2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{2}{6}}, 2^{\frac{3}{6}}, 2^{\frac{4}{6}}, 2^{\frac{5}{6}}\}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{c_0 + c_1 2^{\frac{1}{6}} + c_2 2^{\frac{2}{6}} + c_3 2^{\frac{3}{6}} + c_4 2^{\frac{4}{6}} + c_5 2^{\frac{5}{6}} ;$$

$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{Q}\}$ في

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: ليكن E توسيع حقلي لـ F.

يقال أنّ E توسيع جبري لـ F إذا كان كلّ عنصر من E هو عنصر جبري فوق F.

مثال: $\mathbb{C}$ ليس بتوسيع جبري لـ $\mathbb{Q}$ لأنّ: π و e ليست بجذور جبرية فوق $\mathbb{Q}$.

* * *

مبرهنة: ليكن E توسيع حقلي لـ F ودرجة E فوق F هي n أي $[E:F] = n < \infty$ عندئذٍ: E توسيع جبري لـ F.

(محدودة)

لإثبات: حتى نثبت أنّ E توسيع جبري لـ F يجب أن نثبت أن كل عنصر من E هو عنصر جبري فوق F

$(\forall \alpha \in E : F$ فوق جبري عنصر $\alpha)$

$\forall \alpha \in E$ *

$[E:F] = n < \infty$ بما أنّ E فضاء شعاعي فوق F بعده n

عندئذٍ: المجموعة $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n\}$. هذه المجموعة هي مؤلفة من $(n+1)$ عنصراً فهي مرتبطة خطياً عندئذٍ يمكن التعبير عن 0 بالشكل التالي:

$$c_0 \cdot 1 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + \ldots + c_n \alpha^n = 0 \quad \text{و} \quad c_0, c_1, c_2 \ldots c_n \in F$$

والعاملات ليست جميعها أصفار (معدومة).

$$\exists\, p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \in F[x]$$

و $p(\alpha) = 0$

بما أنّ α جذر لكثير الحدود معاملاتها من F بالتالي α عنصر جبري فوق F

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

E توسيع جبري لـ F.

* * *

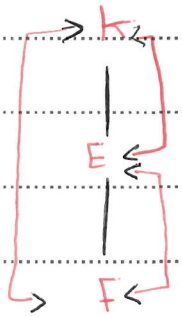
ملاحظة: كل توسيع منتهي هو توسيع جبري.

مبرهنة: (هام درجات). (دون برهان):

k توسيع منتهي للحقل E، E توسيع منتهي للحقل F عندئذ

k توسيع منتهي للحقل F وإن

$$[k:F] = [k:E] \times [E:F]$$



مبرهنة: E توسيع جبري لـ F و $\alpha \in E$ عنصر جبري

فوق F وليكن $\beta \in F(\alpha)$ فإن:

$\deg(\beta, F)$ هذا طرف — $\deg(\alpha, F)$ هذا الطرف

ملاحظة: أي أثبتنا أن $\deg(\alpha, F)$ يقسم $\deg(\beta, F)$

عندئذ $\deg(\beta, F) \neq \deg(\alpha, F)$

$\beta \notin F(\alpha)$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: ليكن $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = \sqrt[3]{2}$

① أوجد $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$ مستخدماً $\mathbb{Q}(\beta)$ فوق $\mathbb{Q}$.

↓ قاعدة

② أثبت أنّ $\alpha \notin \mathbb{Q}(\beta)$ و $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$

③ أوجد

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}]$$

واستنتج القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ فوق $\mathbb{Q}$

④ أثبت أنّ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

وماذا تستنتج.

* * * * * *

الحل: نلاحظ بأنّ

① $irr(\beta,\mathbb{Q}) = x^3 - 2$ طلب أول.

$$deg(\beta,\mathbb{Q}) = deg(irr(\beta,\mathbb{Q})) = 3$$

$$[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}] : deg(\beta,\mathbb{Q}) = 3$$

* والقاعدة لـ $\mathbb{Q}(\beta)$ فوق $\mathbb{Q}$ هي:

$$\{1, \beta, \beta^2\} = \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$$

ولنوجد $deg(\alpha,\mathbb{Q})$ ② $deg(\beta,\mathbb{Q}) = 3$ طلب الثاني.

نلاحظ بأنّ $irr(\alpha,\mathbb{Q})$ هي $x^2 - 2$

$$deg(\alpha,\mathbb{Q}) = deg(irr(\alpha,\mathbb{Q})) = 2$$

$$deg(\beta,\mathbb{Q}) \nmid deg(\alpha,\mathbb{Q}) \Leftarrow 3 \times 2$$

وحتى $\alpha \notin \mathbb{Q}(\beta)$ يجب $deg(\alpha,\mathbb{Q}) \Leftarrow 2 \times 3$ أيضاً $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$

$(deg(\beta,\mathbb{Q}))$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\beta)] \times [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$

$\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$

$\mathbb{Q}(\beta)$

$\mathbb{Q}$

* $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 3$

لأن القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\beta)$ فوق $\mathbb{Q}$ هي $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$

* $[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\beta)] = [\mathbb{Q}(\beta)(\alpha) : \mathbb{Q}(\beta)]$

لنوجد درجة α فوق $\mathbb{Q}(\beta)$ أي $\deg(\alpha, \mathbb{Q}(\beta))$

لنوجد أصغر كثيرة الحدود لـ α فوق $\mathbb{Q}(\beta)$ نلاحظ أن

$\alpha = \sqrt{2}$ جذر لـ $P(x) = x^2 - 2$ حيث $P(x)$ معرفة وهي x محللة فوق $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ لأن $P(x)$ لا تملك جذر في $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ علماً أن جذورها $\pm\sqrt{2}$ ←

$irr(\alpha, \mathbb{Q}(\beta)) = x^2 - 2$

$\deg(\alpha, \mathbb{Q}(\beta)) = \deg(irr(\alpha, \mathbb{Q}(\beta))) = 2$

بالتالي القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ فوق $\mathbb{Q}(\beta)$ هي $\{1, \alpha = \sqrt{2}\}$ نستنتج بأن

$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha,\beta) : \mathbb{Q}(\beta)] \times [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$

$= 2 \times 3 = 6$

بالتالي القاعدة $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ فوق $\mathbb{Q}$ هي:

$\{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{2^5}, \sqrt[6]{2^7}\} = \{1, \sqrt{2}\} \times \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ وهي أعداد جبرية.

ملاحظة: يكفي حساب الرتبة فقط في حقل أعداد الكرية ولثبت لنا بأن كثيرة الحدود x محللة في هذه الحقلات

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الطلب الرابع :

$$\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$$

الاحتواء الأول :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$$

حتى يتم هذا يجب أن نثبت أن :

$$\begin{cases} \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}). \\ \sqrt[3]{2} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}). \\ \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}). \end{cases}$$

$$* \quad \sqrt{2} = (\sqrt[6]{2})^3$$

$$= \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$$

$$* \quad \sqrt[3]{2} = (\sqrt[6]{2})^2 = \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{2} \in \mathbb{Q}\sqrt[6]{2}$$

نلاحظ وضوحاً $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$

بالتالي نلاحظ أن

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$$

↓

أصغر حقل يحوي $\mathbb{Q}$ ويحتوي العناصر $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: ليكن الحقل الثابت:

$$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$$

يجب أن نثبت أن:

$$\sqrt[6]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$$

نثبت:

$$\sqrt{2} \times (\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times (\sqrt[3]{2})^2 \in (\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$$

$$\in (\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \quad (\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \quad (\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \quad \text{بالتالي}$$

نريد أن:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[2]{2})$$

هو توسع بسيط الحقل $\mathbb{Q}$.

أثبتت

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z