كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : العاشرة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

توسيعات الحقول:

تعريف: يقال عن الحقل E بأنه توسيع للحقل f إذا كان $f \subset E$ ونرمز له بـ $E_{|f}$

مثال: $\mathbb{C}$ توسيع للحقل $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ توسيع للحقل $\mathbb{Q}$

ملاحظة: إذا كان E توسيع حقلي لـ f عندئذٍ E فضاء شعاعي (أظن) فوق f

ملاحظة: E فضاء شعاعي (أظن) فوق f.

المجموعة $S = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ قاعدة لـ E فوق f.

إذا تحقق ما يلي:

1- S تولد E فوق f:

$$\forall y \in E : y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \; ; \; \alpha_i \in f$$
$$\forall 1 \leq i \leq n$$

2- S مستقلة خطياً

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots \alpha_n x_n = 0 \; ; \; \alpha_i \in f$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

* في حال $S = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ قاعدة لـ E فوق f عندئذٍ $\dim E = n$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

تعريف: ليكن E توسيع حقلي لـ F.

يقال عن توسيع E للحقل F بأنه توسيع منتهٍ من الدرجة n.

إذا كان بعد الفضاء الشعاعي E فوق F يساوي n ونرمز لذلك بالرمز

$$[E:F] = n$$

(حقل كبير، حقل صغير، درجة (عدد عناصر القاعدة لـ E فوق F هي n))

مثال: لتكن المجموعة

$$K = \{a + b\sqrt{n} \; ; \; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

التي تشكل حقل بالنسبة للعمليتين:

$$(a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$$

$$(a+b\sqrt{2}) \cdot (c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2}$$

① هل K توسيع حقلي لـ $\mathbb{Q}$.

② أوجد $[K:\mathbb{Q}]$

الحل:

$$\forall a \in \mathbb{Q} : a = a + o\sqrt{2} \quad ; \quad o, a \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x \in K$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq K$$

$\Leftarrow$ K توسيع حقلي لـ $\mathbb{Q}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* $S=\{1,\sqrt{2}\}$ قاعدة لـ k فوق $\mathbb{Q}$.

* S تولد لـ k فوق $\mathbb{Q}$:

$\forall y\in k : y=a\cdot 1+b\cdot\sqrt{2}$; $a,b\in\mathbb{Q}$

* S مستقلة خطياً

$\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\sqrt{2}=0$; $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Q}$

ولنبرهن أنّ $\alpha_1=\alpha_2=0$

نفرض أن $\alpha_2\neq 0 \Leftarrow \sqrt{2}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\in\mathbb{Q}$

وهذا مرفوض.

نستنتج أنّ $\alpha_2=0 \Leftarrow \alpha_1=0$.

نستنتج أن $[k:\mathbb{Q}]=2$

تعريف: E توسيع حقلي لـ f

$S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ مجموعة جزئية في E ويحوي الحقل $f(S)$ أيّ $f(a_1,a_2,\dots,a_n)$ أنه يساوي تقاطع جميع الحقول الجزئية في E والتي كلٌّ منها يحوي الحقل f والمجموعة S.

مثال:

$\mathbb{C}$ توسيع حقلي لـ $\mathbb{Q}$

$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ هو أصغر حقل جزئي في $\mathbb{C}$ يحوي $\mathbb{Q}$ وينتمي إليه الجذرين $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$.

برهنة: ليكن E توسيع حقلي لـ f عندئذٍ

1) $f(a)=f$

$\forall a\in f : f(a)=f$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(a,b) = f(a)(b)$ ②
$= f(b)(a)$

تعريف: E | F و $a \in E$ يدعى كل توسيع للحقل f من الشكل $F(a)$ بأنه توسيع بسيط للحقل f.

مثلاً: $\mathbb{R}$ توسيع لـ $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ توسيع لـ $\mathbb{Q}$.

← بأننا ضفنا العنصر $\sqrt{2}$ للحقل $\mathbb{Q}$.

العناصر الجبرية والمتسامية:

تعريف: E توسيع حقلي لـ F يسمى العنصر $\alpha \in E$ عنصر جبري فوق F إذا وجدت كثيرة حدود $f(x)$ بعاملات من F $(f(x) \in F[x])$

بحيث: $f(\alpha) = 0$

* إذا لم يكن α صفراً فوق F فإن α يدعى عنصراً متسامياً فوق F

تعريف:

$\mathbb{C}$ توسيع حقلي لـ $\mathbb{Q}$.

* إذا كان α ينتمي إلى $\mathbb{C}$ عنصراً جبرياً فوق $\mathbb{Q}$ فيكون α عدداً جبرياً.
* إذا كان α ينتمي إلى $\mathbb{C}$ عنصراً متسامياً فوق $\mathbb{Q}$ فيكون α عدداً متسامياً.

مثال: أثبت أن $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ عدداً جبرياً فوق $\mathbb{Q}$.

الحل:

$$\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}}$$
$$\alpha^2 = 1 + \sqrt{3}$$
$$\alpha^2 - 1 = \sqrt{3}$$
$$(\alpha^2 - 1)^2 = 3 \Rightarrow \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 = 3$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow x^4 - 2x^2 - 2 = 0$$

$P(x) = x^4 - 2x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ بما أن α جذر له

أستنتج أن α عدد جبري.

تمرين: أثبت أن $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$

عنصر جبري فوق $\mathbb{Q}[x]$. (لازم نوصل لـ $f(x)=0$)

الحل: $\alpha - \sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$

$$(\alpha - \sqrt{2})^3 = 2$$

$$\alpha^3 - 3\sqrt{2}\alpha^2 + 6\alpha - 2\sqrt{2} = 2$$

$$\alpha^3 + 6\alpha - 2 = +3\sqrt{2}\alpha^2 + 2\sqrt{2}$$

$$\alpha^3 + 6\alpha - 2 = \sqrt{2}(3\alpha^2 + 2)$$

$$[\alpha(\alpha^2+6) - 2]^2 = 2(3\alpha^2+2)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2(\alpha^2+6)^2 - 4\alpha(\alpha^2+6) + 4 = 2(9\alpha^4 + 12\alpha^2 + 4)$$

$$\alpha^6 + 12\alpha^4 + 36\alpha^2 - 4\alpha^3 - 24\alpha + 4 = 18\alpha^4 + 24\alpha^2 + 8$$

$$\Rightarrow x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4 = 0$$

نلاحظ أن x جذر لكثيرة الحدود

$$P(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4$$

ذات المعاملات الأكرية بما أن α عدد جبري.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهنة: إذا كان E توسيع حقلي لـ F.

$\alpha \in E$ عنصر جبري فوق F بالتالي توجد كثيرة حدود $P(x)$ لا تحلل فوق F موحدة ومصيرة α جذراً لها وهي ذات الدرجة الأقل بين جميع كثيرات الحدود التي تقبل α جذراً لها.

* نسمي الـ $P(x)$ كثيرة حدود الأصغرية للعنصر الجبري α فوق F ويرمز لها بالرمز $irr(\alpha, F)$ أو $irr_F(\alpha)$.

مثال: أوجد كثيرة الحدود الأصغرية للعنصر $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ فوق $\mathbb{Q}$.

الحل:

* α جذر كثيرة الحدود

$$P(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$$

* $P(x)$ موحدة لأن $a_4 = 1$
* $P(x)$ لا تحلل فوق $\mathbb{Q}$ مصيرا أي شرطين من أجل $p = 2$

$$irr_{\mathbb{Q}}(\alpha) = irr(\alpha, \mathbb{Q}) = x^4 - 2$$

تعريف: E توسيع حقلي لـ F.

$\alpha \in E$ عنصر جبري فوق F حينئذ يعرف درجة العنصر α فوق F بأنه $(\deg(\alpha, F))$ بأنها درجة كثيرة الحدود الأصغرية للعنصر $\alpha \in E$ فوق F.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\deg(\alpha, f) = \deg(irr(\alpha, f))$$

ملاحظة: من المثال السابق نجد: $\deg(\sqrt{1+3}, \mathbb{Q}) = 4$

مثال: أوجد درجة العنصر $\alpha = \sqrt{2} + 2$ فوق الحقل $\mathbb{Q}$.

الحل:

$$\alpha = \sqrt{2} + 2$$

$$\alpha - 2 = \sqrt{2}$$

$$(\alpha - 2)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0$$

نلاحظ أن α جذر كثير الحدود

$$F(x) = x^2 - 4x - 2$$

حسب معيار ايزنشتين من أجل العدد الأولي $p = 2$ فإن كثيرة الحدود x مختزلة فوق $\mathbb{Q}$ حسب المعيار و $f(x)$ معدومة $a_2 = 1$

$$\Rightarrow irr(\alpha, \mathbb{Q}) = x^2 - 4x + 2 = f(x)$$

$$\Rightarrow \deg(\alpha, \mathbb{Q}) = \deg(irr(\alpha, \mathbb{Q})) = 2$$

أنتهت

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة