كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الثامنة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

معيار الاختزال (التفتيش): ليكن P عدد أولي

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$$

$$\deg F(x) = n > 0$$

لنفرض أن $\overline{a_i} \equiv a_i \pmod{P}$

بالتالي

$$\overline{F(x)} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}_P[x]$$

مبرهنة: إذا كانت $\overline{F(x)}$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}_p[x]$

و $\deg f(x) = \deg \overline{f(x)}$

بالتالي $f(x)$ لا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$ وبالتالي فوق $\mathbb{Z}$

مثال: $f(x) = 21x^3 - 3x^2 + 2x + 9 \in \mathbb{Z}[x]$

أثبت أنه لا مختزلة فوق $\mathbb{Q}$.

الحل: $P = 2$

$$\overline{f(x)} = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$$

حيث $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

$$F(0) = 1 \neq 0$$

$$F(1) = 1 \neq 0$$

$\leftarrow$ باقي.

$\overline{F(x)}$ لا تملك جذور في $\mathbb{Z}_2 \Leftarrow \overline{f(x)}$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}_2[x]$ وبالتالي

حسب معيار الاختزال تكون $f(x)$ لا مختزلة فوق Q.

مثال 2: $f(x) = 21x^3 - 3x^2 + 2x + 8 \in \mathbb{Z}[x]$

اثبت أن $f(x)$ مختزلة فوق Q.

الحل: $p=2$

$$\overline{f(x)} = x^3 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$$

حيث $\mathbb{Z}_2\{0,1\}$

$$\overline{f(0)} = 0$$

$$\overline{f(1)} = 0$$

$\overline{f(x)}$ تملك جذور في $\mathbb{Z}_2$ ⇐ $\overline{f(x)}$ مختزلة في $\mathbb{Z}_2[x]$.

معيار التبعيض لا يفيد نقرمخة P:

$p=5$

$$\overline{f(x)} = x^3 + 2x^2 + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

$$\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$$

$\overline{f(0)} = 3 \neq 0$, $\overline{f(1)} = 8$ أي باقي $3 \neq 0$

$\overline{f(2)} = 23$ أي $3 \neq 0$, $\overline{f(3)} = 4 \neq 0$

$\overline{f(4)} = 2 \neq 0$

$\overline{f(x)}$ لا تملك جذور في $\mathbb{Z}_5$ ⇐ $\overline{f(x)}$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}_5[x]$ حسب معيار الاختزال نلاحظ أن $f(x)$ لا مختزلة فوق Q.

مثال: $f(x) = x^{100} - 9x^3 + 3x - 6 \in \mathbb{Z}[x]$

هل $f(x)$ مختزلة أم لا في $\mathbb{Z}[x]$

الحل: نلاحظ أن من أجل العدد الأولي $P=3$

① $p \nmid a_{100}$ حيث $a_{100} = 1$

② $p \mid a_i$ حيث $0 \leq i \leq 99$

③ $p^2 = 9$ وبالتالي $p^2 \nmid a_0$ حيث $a_0 = -6$

عندئذٍ $f(x)$ لا تختزل فوق Q وبالتالي لا تختزل فوق Z حسب معيار ايزانشتاين

مثال: ليكن $F_n = 2^{2^n} + 1$ حيث $n \geq 1$ عدد صحيح

$f(x) = x^3 + F_n x + 2$

هل $f(x)$ تختزل أم لا في $Z[x]$

الحل: ليكن العدد الأولي $p = 2$

$\bar{f}(x) = x^3 + x \in Z_2[x]$

$\bar{f}(0) = 0$ و $\bar{f}(1) = 2$ أو 0

الباقي.

$\bar{f}(x)$ تملك جذور في $Z_2[x] \Leftarrow \bar{f}(x)$ وهي مختزلة في $Z_2[x]$

وهنا معيار الاختزال لا يفيد في معرفة وضع كثيرة الحدود $f(x)$ فيما إذا كانت مختزلة أم لا في $Z[x]$

من أجل $p = 3$ نلاحظ:

$F_n = 2^{2^n} + 1 \equiv (-1)^{2^n} \mod 3$

$\equiv 1 + 1 \mod 3$

$\equiv 2 \mod 3$

$\bar{f}(x) = x^3 + 2x + 2 \in Z_3[x]$.

$\bar{f}(0) = 2 \neq 0$ و $\bar{f}(1) = 2 \neq 0$ و $\bar{f}(2) = 2 \neq 0$

$\bar{f}(x)$ لا تملك جذور في $Z_3[x] \Leftarrow$ فهي لا تختزل في $Z_3[x]$

وبالتالي حسب معيار التقييد $f(x)$ لا تختزل فوق Q وبالتالي $f(x)$ لا تختزل في $Z[x]$.

معيار Osada 1987 :

هام جداً

ليكن p عدد أولي $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$
$\dots a_1 x \pm p \in \mathbb{Z}[x]$

وليكن

$$p > 1 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}|$$

حينئذ $f(x)$ لا يختزل في $\mathbb{Z}[x]$

الإثبات :

$$f(x) = g(x) . h(x)$$

$$g(x) = x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

$$h(x) = x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \dots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

$$b_0 c_0 = \mp p$$

حينئذ إما $|c_0| = 1$ أو $|b_0| = 1$

وليكن مثلاً $|b_0| = 1$ $((b_0 = \pm 1))$

* القيمة المطلقة لجداء جذور g يساوي 1

* نلاحظ أن g تملك جذر α بحيث $|\alpha| \leq 1$

التعليل : لأنه لو كانت جميع جذور g تقع خارج دائرة الوحدة
$|z| > 1$ حينئذ القيمة المطلقة لجداء جذور g أكبر من 1 وهذا مرفوض.

* بما أن α جذر لـ g $\Leftarrow$ α جذر لـ $f(x)$

$$\Rightarrow f(\alpha) = 0 \ \& \ |\alpha| \leq 1$$

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha \mp p = 0$$

$$\Rightarrow \mp p = |\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots a_1 \alpha|$$

$$p = |\alpha^n + |a_{n-1}||\alpha|^{n-1} + \dots + |a_1||\alpha|$$