كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : السابعة /نظري/

مبرهنة: لتكن F حقلاً، $a \in F$ ولتكن $f(x) \in F[x]$ وعندئذٍ:

1- إذا كانت كثيرة الحدود $a\,f(x)$ لا مختزلة فوق $F \Leftarrow f(x)$ لا مختزلة فوق F (في $F[x]$)

2- إن كان كثير الحدود $f(a+x)$ لا مختزلة فوق $F \Leftarrow f(x)$ لا مختزلة فوق F.

3- إذا كانت كثيرة الحدود $f(a \cdot x)$ لا مختزلة فوق $F \Leftarrow f(x)$ لا مختزلة فوق F.

مثال: $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{6}{3}$

أثبت أن $f(x)$ لا مختزلة فوق Q [أي $Q[x]$].

الحل: $u(x) = 3f(x) = x^2 - 6$

$\deg(u(x)) = 2$

أصفار $u(x)$ هي $\mp\sqrt{6}$

نلاحظ أن $\mp\sqrt{6} \notin Q$

$u(x)$ لا تملك أصفار (جذور) في $Q \Leftarrow u(x)$ لا مختزلة فوق Q.

$\Leftarrow f(x)$ لا مختزلة فوق Q.

مبرهنة: F حقل، $F[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق الحقل F

$f(x) \in F[x]$

عندئذٍ $f(x)$ لا مختزلة فوق F

$\Leftrightarrow I = \langle f(x) \rangle$ إيديال أعظمي

في $F[x] \Leftrightarrow (F[x]/I = \langle f(x) \rangle)$ حقل.

مثال أثبت أن $Q[x] / \langle x^2+1 \rangle$ حقل

نلاحظ بأن $f(x) = x^2+1$ لا مختزلة فوق Q لأن $f(x)$ لا تملك جذور في Q

$\Leftarrow$ $I = \langle f(x) \rangle$ أيديال أعظمي في $Q[x]$ $\Leftarrow$ $Q[x]/\langle f(x) \rangle$ حقل

مبرهنة: ليكن F حقلاً، $F(x)$ $f(x), g(x), p(x) \in$ ولتكن $f(x)$ لا مختزلة فوق F $f(x) \mid g(x) . p(x)$

عندئذ $f(x) \mid g(x)$ أو $f(x) \mid p(x)$

الإثبات: لدينا فرضاً $f(x)$ لا مختزلة فوق $F \Leftarrow I = \langle f(x) \rangle$

ايديال أعظمي في $F[x]$ بالتالي I أيديال أولي في $F[x]$

$f(x) \mid g(x) . p(x) \Rightarrow g(x).p(x) = h(x) . f(x) \in I$

$\Rightarrow g(x) \in I \Rightarrow g(x) = h(x) . f(x).$

$\Rightarrow f(x) \mid p(x)$

ندرس في المبرهنة التالية الحقل

$Z_p[x] / I = \langle f(x) \rangle$

من حيث شكل العناصر وعددها:

مبرهنة

p عدد أولي

$Z_p[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق الحقل Z_p

ولتكن $f(x) \in Z_p[x]$ ، $\deg f(x) = n$

عندئذٍ إذا كانت $f(x)$ لا مختزلة فوق Z_p عندئذٍ:

$(Z_p[x] / \langle f(x) \rangle = \bar{I}) =$

$$\left\{ a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 + I \;;\; a_i \in Z_p \text{ for } 0 \le i \le n-1 \right\}$$

حقل مؤلف من p^n عنصر

مثال $f(x) = x^3+x+1 \in Z_2[x]$

① أثبت أن $p(x)$ لا يختزل في $Z_2[x]$

② أثبت أن الحلقة $Z_2[x]/I$ حقلاً

حيث $I = \langle p(x) \rangle$ ثم عين هذا الحقل.

① Z_2 حقل حقل $\deg f(x) = 3$

نلاحظ $p(0) = 1 \neq 0$

$p(1) = 1 \neq 0$

$p(x)$ لا تملك جذراً في Z_2.

② $p(x)$ لا يختزل فوق $Z_2 \Leftarrow I = \langle p(x) \rangle$ ايديال اعظمي في $Z_2[x]$

$\Rightarrow Z_2[x] / I = \langle p(x) \rangle$ حقل

$$Z_2[x]/I = \langle p(x) \rangle = \left\{ \begin{array}{l} ax^2 + bx + c + I \\ a, b, c \in Z_2 \end{array} \right\}$$

هذا الحقل على $2^3 = 8$ عنصر

ندرس لان بعض المبرهنات والمعايير التي تخص كثيرات الحدود فيما إذا كانت مختزلة أم لا في $R[x]$ حيث $R = Z$ أو $R = Q$

تعريف: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in Z[x]$

نسمي القاسم المشترك الأعظم للعناصر

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in Z$

بريئس كثيرة الحدود $f(x)$ أي إن ريئس كثيرة حدود $f(x)$ هو

$g.c.d(a_0, a_1, \dots, a_n)$

* إذا كان $g.c.d(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ نقول بأن كثيرة الحدود ريئسة

مبرهنة: $f(x)\in \mathbb{Z}[x]$ كثيرة حدود رئيسية (مبرهنة غاوص)

عندئذ $f(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

(مثال)

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$$

1- هل $f(x)$ كثيرة حدود رئيسية أم لا؟

2- أثبت أن $f(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$،

3- أثبت أن $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$؛

الحل: ① $g.c.d = (1, -2, 3) = 1$

$\Leftarrow$ $f(x)$ كثيرة حدود رئيسية

② Q حقل $\deg f(x) = 2$

جذور $f(x)$ في $x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = 4 - 4(1)(3) = -8$

$\sqrt{D} = \pm\sqrt{2}\, i$

$x_1 = 1 + \sqrt{2}\, i \notin Q$

$x_2 = 1 - \sqrt{2}\, i \notin Q$

$f(x)$ لا تملك جذور في Q $\Leftarrow$ $f(x) \in Q$ لا مختزلة فوق Q $(Q[x])$

③ $f(x)$ كثيرة حدود رئيسية و $f(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$

$\Leftarrow$ حسب مبرهنة غاوص فإن $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.

اختبار (معيار):

أيزنشتاين 1850.

ليكن $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

إذا وجد عدد أولي P يحقق الشرط ① $P \nmid a_n$

② P يقسم $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$

③ $p \nmid a_n$ بالتالي $f(x)$ لاختزالية فوق Q (وبالتالي فوق $\mathbb{Z}$)

مثال: $f(x) = x^6 + 9x^4 + 12x^2 + 6$

هل $f(x)$ ختزلة أم لا في $\mathbb{Z}[x]$

الحل: من أجل $p=3$ نجد

① $p \nmid a_n$ حيث $a_n = 1$

② $\forall\, 0 \le i \le 5$ في $p \mid a_i$

③ نلاحظ $p^2 = 9$ ، $p^2 \nmid a_0$

$a_0 = 6$

من تحقق الشروط ① ② ③ بالتالي $f(x)$ لاختزالية فوق Q حسب اختبار

ايزنشتاين $\Leftarrow$ $f(x)$ لاختزالية فوق $\mathbb{Z}$ (في $\mathbb{Z}[x]$).

مثال: $q(x) = x^4 + 3x^2 + 3$

أثبت أن $q(x)$ لاختزالية في $Q[x]$.

نلاحظ من أجل العدد الأولي $p=3$

إن $3 \nmid a_4 = 1$

وأيضاً $p \mid a_i$ ، $i = 0,1,2,3$

$p^2 = 9 \nmid a_0 = 3$

ومنه حسب معيار ايزنشتاين تكون $f(x)$ لاختزالية في $Q[x]$.

مثال: $q(x) = 3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20$

$\in \mathbb{Z}[x]$

أثبت أن $Q[x]/<q(x)>$ حقل؟

يجب أن نثبت أن $q(x)$ لاختزالية في $Q[x]$ من أجل $p = 5$

نلاحظ بأن شروط الاختبار ايزنشتاين محققة $\Leftarrow Q(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$ ،

$\langle Q(x) \rangle$ أيديال أعظمي في $Q[x] \Leftarrow \langle Q(x) \rangle / Q[x]$ حقل

مثال:
$$f(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{5x}{6} + \frac{15}{6}$$
هل $f(x)$ مختزلة أم لا في $Q[x]$ ،

الحل:

$$6f(x) = Q(x) = x^6 - 5x + 15 \in \mathbb{Z}[x]$$

نلاحظ أن $Q(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Q[x]$ حسب معيار أيزنشتاين من أجل العدد الأولي $P=5$.

$\Leftarrow f(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$ ،

$\Leftarrow f(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$.

مثال: أثبت أن كثيرة الحدود

$$\phi_P(x) = \frac{x^P - 1}{x-1} = x^{P-1} + x^{P-2} + \cdots + x + 1$$

حيث P عدد أولي هي كثيرة حدود لا مختزلة في $Q[x]$

نضع $f(x) = \phi_P(1+x)$

$$f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{x+1-1}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^P - 1}{x}$$

$$(x+1)^P = x^P + Px^{P-1} + \frac{P(P-1)x^{P-2}}{2} + \cdots + Px$$

$$+ \cdots + \frac{P(P+1)}{2}x^2 + Px + 1$$

$$(x+1)^p - 1 = x^p + p x^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} x^{p-2} + \dots + p x$$

$$\frac{(x+1)^p - 1}{x} = x^{p-1} + p x^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2} p^{p-3} + \dots + p$$

$f(x)$ لا مختزلة فوق Q حسب معيار آيزنشتاين من أجل العدد الأولي P

$\Leftarrow \Phi_p(1+x)$ لا مختزلة فوق Q

$\Leftarrow \Phi_p(x)$ لا مختزلة في Q.

مثال: $f(x) = x^2 + x + 1$

هل $f(x)$ مختزلة أم لا في $Q[x]$

b) لدينا $\Phi_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$

حيث p عدد أولي

كثيرة حدود لا مختزلة في $Q[x]$

نجعل $p=3$ نجد

$$f(x) = \Phi_3(x) = x^2 + x + 1$$

كثيرة حدود لا مختزلة في $Q(x)$.

ط2) جذور $f(x)$ هي:

$\deg f(x) = 2$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \notin Q$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \notin Q$$

$\Leftarrow$ بالتالي $f(x)$ لا تملك جذوراً في Q.

$\Leftarrow$ $f(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$.

يستخدم معيار اينشتاين فقط اذا كانت المعادلات من Z

The end