كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مثال: لتكن لدينا الحلقة $Z_8[x]$ حيث $Z_8=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

1- أوجد ناتج الجداء التالي في $Z_8[x]$ المعرفة بـ: $(4x+1)(4x+1)$ ماذا تستنتج؟

2- $f(x)=4x+1$ كثيرة حدود مختزلة أم لا في $Z_8[x]$؟

الحل:

1- $(4x+1)(4x+1)$

$16x^2+8x+1=1$

نستنتج أن $(4x+1)$ قابل للقلب في $Z_8[x]$

2- نلاحظ أن $f(x)=4x+1$ قابلة للقلب في $Z_8[x]$ تالي في $Z_8[x]$ المعرفة مختزلة.

****

التمهيدية التالية: تبين لنا أنه في حلقة كثيرات الحدود فوق أي حلقة تامة يوجد كثيرات حدود قابلة للقلب درجتها أكبر من الصفر.

- لتكن R حلقة تامة.

$0\neq f(x)\in R[x]$

إذا كانت $f(x)$ قابلة للقلب في $R[x]$ عندئذ تكون $\deg f(x)=0$

برهان: لدينا $f(x)$ قابلة للقلب في $R[x]$ عندئذ توجد $0\neq g(x)\in R[x]$

$f(x)\cdot g(x)=1$

$\deg(f(x)\cdot g(x))=0$

$\deg f(x)+\deg g(x)=0$

$\Rightarrow \deg f(x)=\deg g(x)=0$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

ملاحظة: أذا كان لدينا كثيرة حدود $f(x) \in R[x]$ حيث $f(x) \neq 0$ حيث R حقل تحوي

و $\deg f(x) > 0$

حينئذ $f(x)$ غير قابل للقلب في $R[x]$.

ملاحظة:

عكس المقدمة السابقة غير صحيح ويوضح ذلك بالمثال:

مثال:

أذا أخذنا $f(x) = 3 \in \mathbb{Z}[x]$ حيث $f(x) \neq 0$

$\deg f(x) = 0$

نلاحظ أن $f(x)$ غير قابل القلب في $\mathbb{Z}[x]$ حيث العناصر القابلة للقلب

في $\mathbb{Z}[x]$ هي $[-1, 1]$.

* بينما أذا كان F حقلاً فأن عكس المقدمة يكون صحيح وهذا ما سنثبته

لنا المبرهنة التالية:

ليكن F حقلاً، $f(x) \in F(x)$ حينئذ $f(x)$ قابلة القلب في $F[x] \Leftrightarrow \deg f(x) > 0$

البرهان:

$\Rightarrow$ لنفرض أن $f(x) \in F(x)$ قابلة للقلب في $F[x]$ ولنبرهن أن F حقلاً

وهو عكس المقدمة حينئذ عكس المقدمة كذب $\deg f(x) = 0$

$\Rightarrow$ لنفرض أن $\deg f(x) = 0$

$f \in F[x] = a \in F \neq 0$

وبما كان F حقلاً فأن العنصر a قابل للقلب في F بالتالي a قابل القلب

في $F[x]$.

سندرس الآن في كثيرات الحدود أن كانت تحليلة أم لا في حلقة كثيرات الحدود

$F[x]$ حيث F حقل.

* سندرس في المبرهنة التالية وضع كثيرات الحدود ذات الدرجة 0 في $F[x]$ حيث F حقل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: F حقل كل كثيرة الحدود في $Z[x]$ درجتها تساوي الصفر هي كثيرة الحدود المختزلة في $Z[x]$.

البرهان: لتكن $f(x)$ كثيرة حدود في $f(x)$ حيث $\deg f(x) \Leftarrow f(x)$ قابل القلب في $Z[x] \Leftarrow f(x)$ مختزلة في $F[x]$

* نستعين بالمبرهنة التالية وضع كثيرات الحدود ذات الدرجة 1 في $F[x]$ حيث F حقل.

مبرهنة: ليكن f حقل كل كثيرة حدود مختزلة في $Z[x]$.

البرهان: لتكن $f(x)$ حدود في $F[x]$ حيث $\deg f(x) = 1 > 0$

$\Leftarrow f(x)$ غير قابل للقلب في $F[x]$

* لتكن $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ حيث $g(x)$ و $h(x)$ من $F[x]$.

ولنثبت أن $g(x)$ قابل للقلب في $Z[x]$ أو $h(x)$ قابل القلب في $F[x]$.

$$\deg f(x) = \deg g(x) + \deg h(x) = 1$$

حسب:

إما $\deg g(x) = 1$ و $\deg h(x) = 0$

$\Leftrightarrow h(x)$ قابل للقلب في $F[x]$ أي $\deg h(x) = 1$ و $\deg g(x) = 0$

$g(x)$ قابل القلب في $Z[x]$.

ملاحظة: أي كثيرة $f(x) \in F[x]$ من F حقل

$$\deg f(x) > 1$$

واستطعنا كتابة $f(x)$ بالشكل

$0 < \deg g(x) < \deg f(x)$ في

$0 < \deg h(x) < \deg f(x)$

حسب: نقول إن $f(x)$ كثيرة حدود مختزلة في $F[x]$ وضد ذلك

بحيث $f(x)$ غير مختزلة في $F[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أثبت أن $f(x)=x^2-2$ غير قابلة للتحليل في $Q[x]$ حيث Q حقل الأعداد النسبية.

الحل: نفرض جدلاً أن $f(x)$ قابلة للتحليل في $Q[x]$، أي أن $f(x)=(ax+b)(cx+d)$ حيث $a,b,c \in Q$

$$x^2-2 = acx^2+(bc+ad)x+bd$$

$$ac=1 \quad \dots (1)$$

$$bc+ad=0 \quad \dots (2)$$

$$bd=-2$$

نضرب (2) بالعدد c نجد أن:

$$bc^2+acd=0$$

$$bc^2+d=0$$

نضرب الطرفين بـ b فنجد: $b^2c^2+bd=0$

$$\Rightarrow b^2c^2=2$$

$$|bc|=\sqrt{2}$$

بما أن الحد المطلق ناطق فإن كثيرة الحدود غير قابلة للتحليل.

ملاحظة: $f(x)=x^2-2$ قابلة للتحليل في $R[x]$ حيث:

$$f(x)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

* * * * * * *

نذكر الآن مبرهنة معرفة فيما إذا كان كثيرة الحدود ذات الدرجة 2 أو 3 قابلة للتحليل أم لا وهي مبرهنة كثيرة الحدود مختزلة خارج الحقل.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: f حقل، $f(x) \in F[x]$

$$\deg f(x) = 3 \text{ or } 2$$

كثيرة الحدود $f(x)$ من $F[x]$ تحلل في $f(x) \Leftrightarrow$ $f(x)$ يملك جذر في F.

البرهان:

$\Leftarrow$ لنفترض أن $f(x)$ من $F[x]$ تحلل $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ حيث

$$0 < \deg g(x) < \deg f(x)$$

$$0 < \deg h(x) < \deg f(x)$$

$$\deg f(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$$

فإن $\deg f(x) = 2$ or 3

كثيرة الحدود الوحيدة التي درجتها أصغر من كثيرة حدود درجتها 1.

نفترض أن $\deg g(x) = 1$ كثيرة $g(x) = ax + b$ ، $a \neq 0$

$a, b \in f$

نلاحظ أن: $x = -ba^{-1} \in f$

$$g(x) = a(-ba^{-1}) + b$$

$$= -b + b = 0$$

$\Leftarrow$ x جذر لـ $g(x)$.

$\Leftarrow$ x جذر لـ $f(x)$ وهو المطلوب.

$\Rightarrow$ كل جذر α في f لـ $f(x)$ يقسم $f(x)$ بدون باقي $(x-\alpha) \mid f(x)$.

$$\exists q(x) \in F[x] \; . \; f(x) = (x-a)\, q(x)$$

نلاحظ $0 < \deg(x-a) < \deg f(x)$

$$0 < \deg q(x) < \deg f(x)$$

$\#$ $f(x)$ من $F[x]$ تحلل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نستنتج من المبرهنة السابقة المبرهنة التالية:

F حقل، $f(x) \in F[x]$ $\deg f(x) = 2$ or 3

كثير حدود $f(x)$ يكون قابلاً للتحليل في $F[x]$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ يملك جذراً في F.

* * * * * * *

مثال: $f(x) = x^2 - 2 \in Q[x]$ هل $f(x)$ تحليل أو لا في $Q[x]$

$\deg f(x) = 2$ *

$f(x)$ جذر في Q $\Leftarrow$ $f(x)$ يملك جذر في Q $\Leftarrow$ $f(x)$ قابل للتحليل في $Q[x]$

مثال: $f(x) = x^2 - 2$ تحليل في $R[x]$ لأن جذور $f(x)$ هي:

$\pm\sqrt{2} \in R$

$f(x)$ تحليل في $R[x]$ $\Leftarrow$ $f(x)$ يملك جذر في R

مثال: $f(x) = x^2 + 1 \in Z_3[x]$

هل $f(x)$ تحليل أو لا في $Z_3[x]$ حيث:

$f(0) = 1 \neq 0$

$f(1) = 2 \neq 0$

$f(2) = 2 \neq 0$

نلاحظ أن $f(x)$ لا يملك جذر في Z_3.

مثال: $f(x) = x^2 + 1 \in Z_5[x]$ حيث $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$

هل $f(x)$ تحليل أم لا في $Z_5[x]$

$\deg f(x) = 2$

$f(0) = 1 \neq 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$F(2) = 0$

$F(3) = 0$

$F(4) = 2$

حيث $f(x)$ كثير حدود من درجتين في Z_5 غير مختزلة في $Z_5[x]$.

مثال: $f(x) = 2x^2 + 4$

هل لكثير الحدود $f(x)$ مختزلة $Q[x]$.

الحل: $\deg f(x) = 2$

$f(x)$ هنا $= 0$ هي $2x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} i \notin Q$

$\Leftarrow f(x)$ كثير حدود غير قابل للاختزال في Q.

$\Leftarrow f(x)$ كثير حدود مختزلة في $Q[x]$.

مثال: $f(x) = x^2 + px + q$

حيث p و q أعداد صحيحة هل $f(x)$ مختزلة أم لا في $Z_2[x]$

$Z_2 = \{0, 1\}$

الحل: $\deg f(x) = 2$

$f(0) = q$

$F(1) = 1^2 + p + q = 1 \neq 0$

$\Leftarrow f(x)$ كثير حدود غير قابل للاختزال في Z_2

$\Leftarrow f(x)$ كثير حدود مختزلة في $Z_2[x]$.

أثبت

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة