كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الخامسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

5

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مبرهنة:

ليكن k حقلاً، $k[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق الحقل k وليكن $f(x) \in k[x]$ و $a \in k$

عندئذٍ a جذراً لـ $f(x) \Leftrightarrow (x-a) | f(x)$

الإثبات:

$\Rightarrow$ لدينا a جذر لـ $f(x) \Leftarrow f(a)=0$ بما أن $(x-a) \in k[x]$

حسب خوارزمية القسمة يوجد $q(x)$ و $r(x)$ من $k[x]$

$$f(x) = q(x)(x-a) + r(x).$$

إما $r(x)=0$

أو $\deg r(x) < \deg(x-a) = 1$

نفرض جدلاً أن $r(x) \neq 0$:

$$0 \leq \deg r(x) < 0$$

$$\deg r(x) = 0$$

$$r(x) = b \neq 0 \in k$$

بما أن a جذر لـ $f(x)$

$$f(a) = 0$$

$$q(a)(a-a) + r(a) = 0$$

$$\Rightarrow r(a) = 0$$

$\Rightarrow b=0$ هذا مرفوض بسبب الفرض الجدلي حاطئ $r(x)=0$

$p(x) = q(x)(x-a)$

$\Rightarrow (x-a) \mid f(x)$

$\Rightarrow$ لدينا فرضاً

$(x-a) \mid f(x)$

$\exists q(x) \in k[x] ; f(x) = q(x)\cdot(x-a)$

$f(a) = q(a)(a-a)$

$= 0$

$\Leftarrow a$ جذر لـ $f(x)$

نتيجة: لتكن $k[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق الحقل k

$f(x) \in k[x]$

$\deg f(x) = n \geq 1$

عندئذ $f(x)$ تملك n جذر كحد أكثر.

* * * * *

مثال:

$f(x) = x^3 + 3x + 2 \in Z_5[x]$

ملاحظة: الطريقة السابقة غير صحيحة من أجل كثيرات الحدود المعرفة فوق الحلقات.

برهنة هامة جداً:

إذا كان k حقلاً $\Leftarrow k[x]$ حلقة المثاليات الرئيسية (PIB)

الإثبات:

k حقل $\Leftarrow$ حلقة صحيحة $\Leftarrow k[x]$

ليكن I مثالي في $k[x]$.

① $I = \langle 0 \rangle \Leftarrow I$ مثالي رئيسي و ② $I \neq \langle 0 \rangle$ ولتكن كل I مثالي رئيسي أي مولد من عناصر من $k[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لنأخذ مجموعة

$$S = \{ \deg f(x) ; f(x) \neq 0 \in I \}$$

$$\emptyset \neq S \subseteq N_0$$

حسب S تحتوي عنصراً صغيراً ليكن n مرتبة بوجود $0 \neq g(x) \in I$

$\deg g(x) = n$ بحيث

ولنثبت أن $I = \langle g(x) \rangle$

لإثبات الاحتواء الأول:

$$\boxed{\langle g(x) \rangle \subseteq I}$$

لإثبات الاحتواء الثاني:

$$\boxed{I \subseteq \langle g(x) \rangle}$$

$\forall P(x) \in I$

$$P(x) = q(x) \times g(x) + r(x)$$

إما $r(x) = 0$

أو $\deg r(x) < \deg g(x)$

نفرض جدلاً $r(x) \neq 0$ بحيث

$$r(x) = P(x) - q(x) \times g(x)$$

$P(x) \in I$ من $\quad q(x) \times g(x) \in I$ من

$$\deg r(x) < \deg g(x) = n$$

حسب S تحتوي عنصراً أصغر من n وهذا مرفوض بالتالي:

$$\Leftarrow r(x) = 0$$

$$P(x) = q(x) \cdot g(x) \in \langle g(x) \rangle$$

$$\Rightarrow I \subseteq \langle g(x) \rangle$$

بالاستنتاج أن $I = \langle g(x) \rangle$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $\mathbb{R}[x]$ حلقات أبيالات رئيسية.

ملاحظة: إذا كان K حقلاً عندئذ حلقة كثيرات الحدود $K[x]$ حلقة أبيالات رئيسي أي كل أبيال منها هو أبيال رئيسي مولد بكثيرة حدود ذات الدرجة الأصغر من I.

مثال: ليكن $\mathbb{Z}[x]$ حلقة كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة وليكن:

$I = \{ xf(x) + 2g(x) \mid f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x] \}$ أبيال

أ) أثبت أن $1 \in I$

ب) أثبت أن I ليست أبيال رئيسي وماذا نتيجة.

الحل:

1. نفرض جدلاً $1 \in I$

$1 = xF(x) + 2xg(x) \; ; \; f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$= x(a_0 + a_1x + \dots) + 2x(b_0 + b_1x + \dots)$

$1 = 2b_0 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{2}$

وهذا مرفوض كون $b_0 = 3$

$I = \mathbb{Z}[x] \Leftarrow 1 \in I$

2. نفرض جدلاً وأن I أبيال رئيسي في $\mathbb{Z}[x]$

$I = \langle h(x) \rangle \; ; \; h(x) \in \mathbb{Z}[x]$

* لدينا $2 \in I$ إذن

$2 = x \cdot x_0 + 2 \cdot x$

$\Rightarrow h(x) \mid 2 \Rightarrow h(x) \mid x \cdot k(x)$

$h(x), k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ و

* لدينا $x \in I$ إذن: $x = x \cdot x_1 + 2x_0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow$ $\boxed{x = h(x) \cdot d(x)}$; $d(x) \in \mathbb{Z}[x]$

عندئذ $2x = h(x) \cdot r(x) \times x$

$= 2x \; h(x) \; d(x)$

$\Rightarrow \boxed{r(x) = 2d(x)}$

بما أن $r(x)$ عدد زوجي

$\Rightarrow$

$r(x) = 2x(x)$; $r(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$x \times 2x \; r[x] = 2d(x)$.

$\Rightarrow 2d(x) = 2r(x) \times h(x) \; d(x)$

$\Rightarrow 1 = r(x) \times h(x) \in \langle h(x) \rangle = I$

$\Rightarrow 1 = r(x) \times h(x)$

$\in \langle h(x) \rangle = I$

$\Rightarrow 1 \in I$

وهذا تناقض.

$\Leftarrow$ نستنتج أن I ليست أيديال رئيسي في الحلقة $\mathbb{Z}[x]$

وليست حلقة ايديالات رئيسية.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

دراسة كثيرات الحدود الأختزالة في $R[x]$ حيث R حلقة تامة

تعريف: لتكن R حلقة تامة، و $f(x) \in R[x]$ و $f(x) \neq 0$

يقال عن كثيرة الحدود $f(x)$ أنها أختزالة في $R[x]$ إذا تحقق الشرطين:

1. $f(x)$ غير قابل للقلب في $R[x]$.
2. لا يمكن كتابة $f(x)$ على شكل جداء كثيرتي حدود كل منهما غير قابلة للقلب في $R[x]$

بمعنى آخر:

إذا كانت $f(x) = g(x) \cdot p(x)$

حيث $g(x), p(x) \in R[x]$

عندئذ إما:

$g(x)$ قابلة للقلب في $R[x]$

أو $p(x)$ قابلة للقلب في $R[x]$.

ملاحظة: أي كثيرة حدود $f(x)$ أختزالة في $R[x]$ هي كثيرة حدود مختزلة.

أمثلة:

1. $f(x) = x^2 - 4$

مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

$= (x-2)(x+2)$

$(x-2)$ غير قابلة للقلب

$(x+2)$ غير قابل للقلب

2. $f(x) = 6x + 3 \Rightarrow 3(2x+1)$

3 غير قابلة للقلب

$(2x+1)$ غير قابل للقلب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3) $f(x) = 2x + 5 \in \mathbb{Z}[x]$

$\mathbb{Z}[x]$ عنصر وحدة في

كثيرة حدود

$p(x) \Leftarrow \deg p(x) = 1 > 0$

غير قابلة للقلب في $\mathbb{Z}[x]$

* نفرض جدلاً أن $f(x)$ وحدة في $\mathbb{Z}[x]$

$f(x) = h(x) * g(x)$; $h(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$h(x), g(x)$ غير قابلين للقلب

بما أن $\mathbb{Z}[x]$ حلقة تامة

$\deg f(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$

$1 = \deg g(x) + h(x)$

أي $h(x) = 1$, $\deg(x) = 0$, $\deg(x) = 0$

$g(x) = b \neq 0$ حيث $a_1 \neq 0$

$f(x) = 2x + 5 = b(a_1 x + b_1)$

$\Rightarrow 2x + 5 = b a x + b b_1$

$a_1 b = 2 \Rightarrow b \mid 2$

$b b_1 \Rightarrow b \mid 5$ $\Big\}$ $b \mid gcd(2, 5)$

$= b \mid 1 \Rightarrow b = 1$ or $b = -1$

وهذا مرفوض لأن $g(x) = b$ غير قابل للقلب في $\mathbb{Z}[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

A to Z LIBRARY

FOR UNIVERSITY SERVIC

أو $\deg h(x) = d$

f

$\deg g(x) = 1$

وهذا كل ما تناولته بمثالي ضوئي حيث يا طلاب

The End

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z