كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تذكرة ببعض مفاهيم البنى الجبرية:

- تعريف الزمرة $(G, *)$: المجموعة G غير خالية، والمزودة بالقانون التركيب الداخلي $*$

$$* : G \times G \longrightarrow G$$
$$* \quad (a, b) = a * b.$$

تسمى زمرة إذا تحققت الشروط التالية:

1) $*$ تجميعية.

$$\forall a, b, c \in G$$
$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

2) الحيادي.

يوجد في G عنصر حيادي بالنسبة لـ $*$ نرمز له بـ e وتحقق الشرط $\forall a \in G : a * e = e * a = a$

3) المقلوب (المعكوس):

يوجد لكل عنصر $a \in G$ عنصر $b \in G$ بحيث $a * b = b * a = e$

حيث e الحيادي في G بالنسبة لـ $*$ نسمي العنصر b مقلوب (معكوس) العنصر a ونكتب: $b = a^{-1}$

ملاحظة: لتكن $(G, *)$ زمرة يقال بأن $(G, *)$ زمرة تبديلية إذا تحققت الشرط: $\forall x, y \in G : x * y = y * x$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

أمثلة: 1- $(Z, +)$ زمرة تبديلية

2- $(Z, \cdot)$ ليست زمرة وذلك لأن مثلاً $2 \in Z$ معكوسه $\frac{1}{2} \notin Z$

3- زمرة الجمع بالمقياس العدد الصحيح (Z_n, t_n) حيث:

$Z_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

و العملية t_n بالشكل $\forall x, y \in Z_n$

$x +_n y = t$

t: باقي القسمة $(x+y)$ على العدد n :

مثلاً: أوجد جدول العملية t_n في الزمرة (Z_6, t_n)

t_n	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	(0)
2	2	3	4	5	(0)	1
3	3	4	5	(0)	1	2
4	4	5	(0)	1	2	3
5	5	(0)	1	2	3	4

معكوس كل عدد:

a	0	1	2	3	4	5
a^{-1}	0	5	4	3	2	1

كل عدد من حاصلات تجليهم وفق t_n يجب أن نحصل على العنصر الحيادي

وهو (0):

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: $(G,*)$ زمرة

$\emptyset \neq H \subseteq G$

يقال بأن H زمرة جزئية من الزمرة G اذ تحققت الشرط التالي:

$$\forall x,y \in H : x * y^{-1} \in H$$

مثال: لتكن $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد العقدية أثبت أن

$$H = \{ a+bi ; a,b \in \mathbb{R} \ \& \ a^2+b^2=1 \}$$

زمرة جزئية من $(\mathbb{C},\cdot)$

• ضرب الاعداد العقدية.

الحل:

$$\forall x,y \in H : x \cdot y^{-1} \in H$$

$$x = a+bi \ ; \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \ \& \ a^2+b^2=1$$

$$y = c+di \ ; \ c,d \in \mathbb{R} \ \& \ c^2+d^2=1$$

$$x \cdot y^{-1} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

$$= ac - adi + bci + bd$$

$$= ac + bd + (bc - ad)i$$

نلاحظ:

$$(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$$

$$= a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd + b^2c^2 + a^2d^2 - 2abcd$$

$$= (a^2+b^2)c^2 + (a^2+b^2)d^2$$

$$= 1c^2 + 1d^2 = c^2+d^2 = 1$$

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H$ بما أن H زمرة جزئية من $(\mathbb{C},\cdot)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المرفقات اليسارية واليمينية لزمرة جزئية H في الزمرة $(G,*)$

تعريف: لتكن $(G,*)$ زمرة، H زمرة جزئية في G، $a,b \in G$

* نسمي المجموعة:

$$a*H = \{a*h \; ; \; h \in H\}$$

مرافقة يسارية الزمرة الجزئية H في G.

* نسمي المجموعة:

$$H*b = \{h*b \; ; \; h \in H\}$$

مرافقة يمينية للزمرة الجزئية H في G.

ملاحظة 1: $(G,*)$ زمرة، H زمرة جزئية من G يقال بأن H زمرة جزئية ناظمية إذا تحققت الشرط

$$a*H = H*a \quad \forall a \in G.$$

ملاحظة 2: كل زمرة جزئية من الزمرة التبديلية هي زمرة ناظمية.

زمرة القسمة (عامل الزمرة):

لتكن $(G,*)$ زمرة، H زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G نعرف علاقة تكافؤ على الزمرة بالشكل

$$\forall a,b \in G: \; a \sim b \Leftrightarrow aH = bH$$

مجموعة صنوف تكافؤ هذه العلاقة هي:

$$G/H = \{xH \; ; \; x \in G\}.$$

المجموعة G/H تزود بعملية بالشكل التالي:

$$(xH)(yH) = (xy)H.$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نلاحظ أن $(G/H, .)$ زمرة تسمى بزمرة القسمة أو عامل الزمرة والجوابي فيها هو H.

مثال:

$(\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبديلية

$H = 3\mathbb{Z}$ زمرة جزئية نظيمية في $(\mathbb{Z}, +)$

المطلوب:

1- أوجد المرافقات اليسارية لـ H في $\mathbb{Z}$

2- أوجد $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

أي مرافقة يسارية لـ H في $\mathbb{Z}$ على الشكل:

$a + H$; $a \in \mathbb{Z}$

$\forall x \in \mathbb{Z}$; $x = 3q + r$

; $r \in \{0, 1, 2\}$

$\Rightarrow x - r = 3q \in H$

$\Rightarrow x + H = r + H$

لتصبح المرافقات هي:

$\{0 + H, 1 + H, 2 + H\}$

عندئذ:

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$

* * *

تعريف الحلقة: قدم من قبل العالم الألماني David Hilbert

الحلقة: $(R, +, .)$ هي مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخلين $(+)$ و $(.)$

$+ : R \times R \longrightarrow R$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$+(a,b) = a+b$

$\cdot : R \times R \longrightarrow R$

$\cdot(a,b) = a \cdot b$

بحيث يتحقق الشروط الآتية:

① $(R,+)$ زمرة تبديلية.

② العرب $(\cdot)$ تجميعي

$\forall a,b,c \in R$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ف

③ $(\cdot)$ توزيعي على $(+)$ من اليمين و اليسار

$\forall a,b,c \in R$

$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ و

$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

تعريف:

* $(R,+,\cdot)$ حلقة عندما يقال بأن الحلقة $(R,+,\cdot)$ تبديلية أذا تحقق الشرط:

$\forall a,b \in R$

$\Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$

* يقال بأن الحلقة $(R,+,\cdot)$ واحدية أذا وجد في R حيادي بالنسبة لـ $(\cdot)$

* يرمز لحيادي الحلقة بالنسبة للجمع بـ 0_R

* العرب بـ 1_R يسمى واحد الحلقة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $(Z, +, \cdot)$ حلقة تبديلية واحدية

$(Z_n, +_n, \cdot_n)$ حلقة الأعداد الصحيحة مقياس n

$\forall x, y \in Z_n$

$x +_n y = t$ باقي قسمة $x+y$ على n

$x \cdot_n y = t$ باقي قسمة xy على n.

عنصر الحلقة (O_{Z_n}) هو 0

عناصر الحلقة Z_n هو 1.

نلاحظ أن: $(Z_n, +_n, \cdot_n)$ هي حلقة تبديلية واحدية.

تعريف:

$\emptyset \neq H \subseteq R$ حلقة و $(R, +, \cdot)$

يقال بأن H حلقة جزئية من R إذا تحقق مايلي:

① $\forall x, y \in H : x - y \in H$

② $\forall x, y \in H : xy \in H$

تعريف: ليكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدية $0_R \neq a \in R$

* يقال عن العنصر a أنه قابل للقلب في R إذا تحقق الشرط التالي:

$\exists\, 0_R \neq b \in R$

$ab = ba = 1_R$ ؟

* يقال عن العنصر a أنه قاسم للصفر في R إذا وجد عنصر $0_R \neq b \in R$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بحيث: $ab = ba = aR$

تعريف:

الحلقة الصحيحة (المنطقة الكاملة)

يقال عن الحلقة $(R, +, \cdot)$ أنها حلقة صحيحة إذا كانت الحلقة R تبديلية حاصلية (تامة) $\leftarrow R$ لا تحوي قواسم للصفر.

مثال: لتكن لدينا الحلقة $(Z_8, +_8, \cdot_8)$

1- أوجد جدول العمليتين $+_8$، $\cdot_8$ في Z_8.

2- أوجد قواسم الصفر والعناصر القابلة للقلب في Z_8.

$+_8$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

$\cdot_8$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

قواسم الصفر هي $\{2, 4, 6\}$

عناصر قابلة للقلب هي $\{1, 3, 5, 7\}$

نتيجة: ليست حلقة صحيحة #

أتابع المحاضرة ⇐

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z