كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

• أصفار التابع: ليكن التابع $f(z)$ تحليلية في النقطة z_0 ، نقول عن z_0 أنها صفر للدالة $f(z)$ من المرتبة n إذا تحقق أن:

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \qquad f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

عندما $n=1$ بالتالي z_0 نسميه صفر بسيط

• النقطة z_0 هي صفر من المرتبة n للدالة $f(z)$ التحليلية في z_0 إذا وفقط إذا كان في بعض جوار هذه النقطة تتحقق المعادلة:

$$f(z) = (z-z_0)^n \, \psi(z)$$

حيث $\psi(z)$ تحليلية في z_0 و $\psi(z_0) \neq 0$

مثال: أوجد أصفار الدالة $F(z) = 1+\cos z$ وأوجد مرتبتها؟

الحل: نساوي $f(z)$ بالصفر بالتالي:

$$\cos z = -1$$

$$z_n = (2n+1)\pi \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$F'(z) = -\sin z$$

$$F'(z_n) = -\sin((2n+1)\pi) = 0$$

$$F''(z) = -\cos z$$

$$F''(z_n) = -\cos((2n+1)\pi) = 1 \neq 0$$

بالتالي $z_n = (2n+1)\pi$ أصفار الدالة $F(z) = 1+\cos z$ من المرتبة الثانية حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

مثال: أوجد أصفار الدالة $F(z) = 1 - e^z$ ثم أوجد مرتبتها؟

الحل:

$$F(z) = 0 \iff e^z = 1$$

$$z_n = 2n\pi i \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$F'(z) = -e^{z}$

$F'(z_n) = -e^{-2n\pi i} = -1 \neq 0$

بالتالي $z_n = 2n\pi i$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ صفر بسيط للدالة $1 - e^{z}$

- $f(z) = \dfrac{z^8}{z - \sin z}$; $z = 0$

الحل:

$$F(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots} = \frac{z^8}{z^3\left[\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} \cdots\right]}$$

$$= \frac{z^5}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \cdots} = z^5\left[\frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!}}\right].$$

- $(z - z_0)^n . \psi(z)$.

$$\psi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \cdots}$$

$F(z) = z^5 \psi(z)$ بالتالي $\psi(0) \neq 0$

حيث $\psi(z)$ تحليلية في النقطة $z = 0$ و $\psi(0) = 6$ وبالتالي $z_0 = 0$

صفر الدالة $f(z)$ من المرتبة الخامسة $n = 5$

مثال: أوجد أصفار الدالة $f(z) = (z^2+1)^3 \operatorname{ch} z$ وحدد مرتبتها؟

الحل:

$F(z) = 0 \iff (z^2+1)^3 \operatorname{ch} z = 0$

إما $(z^2+1)^3 = 0 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z_1 = -i$ أو $z_2 = +i$

أو $\operatorname{ch} z = 0 \Rightarrow z = n\pi i$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\operatorname{sh}(n\pi i) = i \sin(i(n\pi i)) = i \sin(-n\pi) = 0$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$F(z) = (z-i)^3 . (z+i)^3 . \operatorname{sh} z = (z+i)^3 . \varphi_1(z)$

حيث $\varphi_1(z)$ دالة تحليلية بجوار $z_1 = -i$ و:

$\varphi(-i) = -i^3 \cdot sh\,i \Leftrightarrow -i^4 \cdot \sin(-1) \neq 0$

بالتالي $z_1 = -i$ صفر من المرتبة الثالثة بالمثل نجد أنّ $z_2 = i$ صفر من المرتبة الثالثة.

$f'(z) = 3(z^2+1)^2(2z)\,sh\,z + (z^2+1)^3 \cdot ch\,z$

$F'(z_n) = 6(n\pi i)(-n^2\pi+1)^2 \cdot sh(n\pi i) + (-n^2\pi^2+1)^3 \cdot ch(n\pi i)$

$= 0 + B + 0$

بالتالي $z_n = n\pi i$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ أصفار بسيطة.

مبرهنة: لنشر تابع تحليلي $f(z)$ في سلسلة لوران ضمن الحلقة وحيد.

$D: r < |z - z_0| < R$

مبرهنة القيمة العظمى: إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في الحلقة $D: r_0 < |z - z_0| < R_0$ فإنّ الأمثال c_n في سلسلة لوران للدالة f ضمن D تحقّق متراجحة كوشي

$|c_n| \leq \frac{M}{|R^n|}$; $n \in \mathbb{Z}$ $\quad M = \max_{x_0} |f(z)|$

$x_0 = |z - a| = R$ $\quad r_0 < R < R_0$

تعريف: ليكن $F(z)$ تابع وحيد القيمة يقال أنّ $z = a$ نقطة شاذة ذات طبيعة واحدة لتابع F إذا لم يكن f تحليلياً في a.

وتسمّى النقطة الشاذة $z = a$ $(a \neq \infty)$ معزولة لتابع f إذا كان f تحليلياً في جوار a الموجود.

$0 < |z - a| < r$ أي إذا أمكن إحاطة النقطة a بدائرة لا تحوي داخلها أية نقطة شاذة للتابع سوى a.

• النقطة $z = \infty$ تكون شاذة للتابع $f(z)$ إذا وفقط إذا كانت النقطة $\omega = 0$ شاذة لتابع $f(\frac{1}{\omega})$.

وتسمّى النقطة الشاذة $z = \infty$ معزولة لتابع $F(z)$ إذا كان F تحليلياً في جوار $z = \infty$ الموجودة أي إذا وُجدت دائرة مركزها المبدأ بحيث لا يقع خارجها أي نقطة شاذة لـ f سوى ∞.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

• إذا لم تكن النقطة الشاذة a معزولة نسميها نقطة شاذة غير معزولة ومن الواضح أنه كي يوجد نقاط شاذة غير معزولة يجب أن يكون عدد النقاط الشاذة غير منتهي وتكون تلك النقطة نقطة تراكم لمجموع النقاط الشاذة.

$\lim_{z\to\infty} z_k = z_0$ ← نقطة شاذة غير معزولة

• تصنيف النقاط الشاذة المعزولة: ← نقطة شاذة

لتكن a نقطة شاذة معزولة لتابع $f(z)$ الوحيدة القيمة فإن a (يمكن أن تكون ∞) تسمى:

1. شاذة قابلة للإصلاح أو للإزالة: إذا كانت النهاية $\lim_{z\to a} f(z)$ موجودة ومحدودة

مثال: النقطة $z=-i$ والتابع $\frac{z^2+1}{z+i}$

$$\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z+i} = \lim_{z\to -i}\frac{(z-i)(z+i)}{z+i} = -2i$$

نقطة شاذة قابلة للإصلاح أو للإزالة لإصلاحها:

$$f(z)=\begin{cases}\frac{z^2+1}{z+i} & ; \quad z\neq -i\\ -2i & ; \quad z=-i\end{cases}$$

2. قطب لتابع f: إذا كانت النهاية $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ موجودة وغير محدودة

مثال: النقطة $z=-1$ للتابع $f(z)=\frac{z}{(z+1)^2}$ والنقطة $z=\infty$ للتابع: $f(z)=\ln(z)$

3. شاذة أساسية للتابع f: إذا كانت النهاية $\lim_{z\to a} f(z)$ غير موجودة

مثال: $z=0$ لتابع: $e^{\frac{1}{z}}$ ، $\sin\frac{1}{z}$ ، $\cos\frac{1}{z}$

أو $z=\infty$ للتوابع: $\cos z$ ، $\sin z$ ، e^z

تمرين: حدد نوع النقاط الشاذة في المستوي الموسع $\bar{C}$ لكل من التوابع f التالية:

$\bar{C}=\bar{R}\times\bar{R}$; $\bar{R}=[-\infty, +\infty]$

1) $\frac{z^2-9}{z^2(z-3)}$ ، 2) $e^{\frac{1}{z-1}}$ ، 3) $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: 1) النقاط الشاذة للتابع $\frac{z^2-9}{z^2(z-3)}$ هي: $z_1=3$ و $z_2=0$

إن النقاط z_1 و z_2 نقاط معزولة لأنه يمكن إيجاد جوار:

$$b<|z|<1 \quad , \quad 1<|z-3|<a$$

$$\lim_{z\to 3}\frac{z^2-9}{z^2(z-3)}=\lim_{z\to 3}\frac{z+3}{z^2}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

النهاية موجودة ومحدودة.

$z=3$ نقطة شاذة قابلة للإزالة

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2-9}{z^2(z-3)}=\infty$$

$z=0$ قطب من أجل $f(\infty)=0$

2) $F(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ ، $z=1$ و $\lim_{z\to 1} f(z)$ غير موجود

إذاً $z=1$ نقطة شاذة أساسية.

$z=\infty$ نقطة عادية وليست شاذة. $f(\infty)=e^0=1$

3) $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ و $\sin\frac{1}{z}=0$ عندما:

$$\frac{1}{z_n}=n\pi \Rightarrow z_n=\frac{1}{n\pi} \quad ; \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$\lim_{z\to z_n}\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}=\infty$$

z_n هي أقطاب.

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}=0$$

$z=0$ نقطة شاذة غير معزولة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة