كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي ١

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

• سلسلة لوران:

الدالة $f(Z)$ التحليلية وحيدة القيمة في الحلقة $r<|Z-Z_0|<R$ فإنّ سلسلة لوران تعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f(Z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\,(Z-Z_0)^n} \quad ---(1)$$

$$f(Z)=\sum_{n=-\infty}^{n=-1} C_n(Z-Z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty} C_n(Z-Z_0)^n$$

$$\boxed{f(Z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(Z-Z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(Z-Z_0)^n} \quad ---(2)$$

حيث المعاملات $C_n$ وتعطى بالعلاقة:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(Z)}{(Z-Z_0)^{n+1}}\,dZ$$

$n=0,\pm1,\pm2,\dots$

حيث $\Gamma$ الدائرة التي مركزها $Z_0$ وتقع كاملاً داخل الحلقة $r<|Z-Z_0|<R$

* نسمي $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{C_{-n}}{(Z-Z_0)^n}$ الجزء الرئيسي لسلسلة لوران

$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(Z-Z_0)^n$ الجزء الثانوي لسلسلة لوران

**مثال**: أوجد سلسلة لوران للدالة $f(Z)=\frac{1}{(Z^2-1)^2}$ داخل الحلقة $0<Z-1<2$

الحل:

$$f(Z)=\frac{1}{(Z+1)^2(Z-1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Z-1}-\frac{1}{Z+1}\right)^2=$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(Z-1)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(Z+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(Z-1)(Z+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(Z-1)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(Z+1)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{Z-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{Z+1} \quad ---(3)$$

تذكرة:

$$(*)\left\{(1+Z)^{\alpha}=1+\alpha Z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}Z^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}Z^n+\dots\right.$$

$\alpha = -1 \Rightarrow \frac{1}{1+Z} = 1 - Z + Z^2 + \dots + (-1)^n Z^n + \dots$

$$\frac{1}{1+Z} = \frac{1}{1+Z-1+1} = \frac{1}{2+(Z-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{Z-1}{2}}$$

نعوض في (*) بدل $Z$ نضع $\frac{Z-1}{2}$ :

$\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+Z} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{Z-1}{2} + \frac{(Z-1)^2}{2^2} + \dots\right] \quad \dots (4)$$

$\alpha = -2$

$$\frac{1}{(1+Z)^2} = \frac{1}{4}\left[1 - 2\left(\frac{Z-1}{2}\right) + \frac{-2(-2-1)}{2!}\left(\frac{Z-1}{2!}\right)^2 + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - (Z-1) + \frac{3}{2^2}(Z-1)^2 + \dots\right] \quad \dots (5)$$

نعوض (4) و (5) في (3) نجد :

$$f(Z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(Z-1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{Z-1} + \frac{1}{4^2}\left(1 - (Z-1) + \frac{3}{2^2}(Z-1)^2 + \dots\right)$$
$$+ \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{Z-1}{2} + \frac{(Z-1)^2}{2^2} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{(Z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(Z-1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{Z-1} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8}(Z-1) + \frac{5}{64}(Z-1)^2 - \frac{3}{64}(Z-1)^3 + \dots$$

الجزء الأساسي لسلسلة لوران الدالة $f(Z)$ في الحلقة $0 < |Z-1| < 2$

هو

$$\sum_{n=\infty}^{1} \frac{c_n}{(Z-Z_0)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(Z-1)^2} - \frac{1}{Z-1}\right)$$

الطريقة (2) :

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(Z)}{(Z-Z_0)^{n+1}}\,dZ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{dZ}{(Z-1)^{n-1}(Z^2+1)^2}$$

حيث $\Gamma$ هي الدائرة التي مركزها $Z_0 = +1$

نميز حالتين : $\boxed{a}$ $n+3 \le 0 \Leftarrow n \le -3$

بالتالي الدالة $g(Z) = \frac{1}{(Z-1)^{n+1}(Z^2-1)^2}$ تحليلية داخل الحلقة

$0 < |Z-1| < 2$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

والتكامل على منحني مغلق فحسب كوشي يكون $\int_\Gamma g(z)\,dz = 0$

أي $c_n = 0$ عندما $n \le -3$ أي: $c_{-3} = c_{-4} = c_{-5} = \dots = 0$

B) $n+3>0$ أي $n>-3$ . لدينا حسب كوشي التكاملية:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^{n+3}}\,dz = \frac{1}{(n+2)!} f^{(n+2)}(z_0)$$

$$c_{-2} = \frac{1}{0!} f^{(0)}(z_0) = \frac{1}{2^2} \qquad c_{-1} = \frac{1}{1!}\left(-\frac{1}{4}\right) \qquad c_2 = \frac{1}{4!} f^{(4)}(1)$$

وسلسلة لوران للدالة $f(z)$ تقع داخل الحلقة $0<|z-1|<2$ وهي:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = c_{-2}(z-1)^{-2} + c_{-1}(z-1)^{-1} + \dots$$

$$= \frac{1}{4}(z-1)^2 - \frac{1}{4}(z-1)^{-1}$$

مثال: أوجد سلسلة لوران للدالة: $f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z}$ في جوار $z_0=0$ ؟

الحل: من أجل $\varepsilon_n$ عدد عقدي فإنّ منشور $\cos \varepsilon_n$ هو:

$$\cos\varepsilon_n = 1 - \frac{\varepsilon_n^2}{2!} + \frac{\varepsilon_n^4}{4!} - \frac{\varepsilon_n^6}{6!} + \dots$$

نعوض $\varepsilon_n = \frac{1}{z}$ فنجد:

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^6} + \dots$$

$$f(z) = z^2\cos\frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^4} + \dots$$

جوار $0 < |z| \le +\infty$

$f(z)$ تحليلية داخل الحلقة $0<|z|<\infty$

مثال: لننظر في التوسعات المختلفة بسلسلة لوران للدالة: $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$

في جوار $z_0 = 0$ ؟

الحل: الدالة $f(z)$ تمتلك $z_1=-2$ و $z_2=1$ نقاط شاذة

لدينا ثلاث حلقات مركزها $z_0=0$ (a) $|z|<1$ (b) $1<|z|<2$

(c) $-2<|z|<+\infty$ خارج الدائرة $|z| \le -2$

لدينا (+) $\boxed{f(z) = \frac{2z-1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}}$

الحالة (a): $|Z|<1$

$$\frac{1}{2+Z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{Z}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{Z}{2}+\frac{Z^2}{4}+\dots+\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot Z^n+\dots\right] \quad (8)$$

$$\frac{1}{Z-1}=\frac{-1}{1-Z}=-(1+Z+Z^2+\dots\dots) \quad (9)$$

نعوض في (7)

$$f(Z)=\frac{1}{2}-\frac{Z}{2^2}+\frac{Z^2}{2^3}+\dots-1-Z-Z^2$$

$$f(Z)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}Z-\frac{7}{8}Z^2-\frac{15}{16}Z^3+\dots$$

وتمثل سلسلة تايلور لأن الجزء الأساسي معدوم

الحالة (b): $1<|Z|<2$

لدينا السلسلة (9) متقاربة داخل الحلقة ولكن (8) متباعدة لذلك نكتب

$$f(Z)=\frac{1}{Z+2}+\frac{1}{Z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{Z}} \quad (10)$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{Z}}=1+\frac{1}{Z}+\frac{1}{Z^2}+\dots$$

نعوض (8) و (11) في (10)

$$f(Z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{Z}{2}+\frac{Z^2}{4}+\dots\right)+\frac{1}{Z}\left(1+\frac{1}{Z}+\frac{1}{Z^2}+\dots\right)$$

$$f(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{Z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{Z^n}{2^n}$$

الحالة (c): (8) و (9) متباعدات خارج الدائرة $|Z|\leq 2$

$$f(Z)=\frac{1}{Z}\left[\frac{1}{1+\frac{2}{Z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{Z}}\right]$$

$$\Rightarrow f(Z)=\frac{1}{Z}\left[1-\frac{2}{Z}+\frac{4}{Z^2}+\frac{8}{Z^3}+\dots+1+\frac{1}{Z}+\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{Z^3}+\dots\right]$$

$$f(Z)=\frac{2}{Z}-\frac{1}{Z^2}+\frac{5}{Z^3}-\frac{7}{Z^4}+\dots$$

هذا المثال يثبت أنه من أجل نفس الدالة فإن سلسلة لوران تمتلك بشكل مختلف باختلاف الحلقات.

$\boxed{\text{مثال}}$: وسّع الدالة $f(Z)$ في سلسلة لوران حيث:

$$f(Z)=\frac{2Z-3}{Z^2-3Z+2}$$

في جوار نقاطها الشاذة؟

الحل:

$$Z^2-3Z+2=0 \Rightarrow Z_1=1 \;\; \& \;\; Z_2=2$$

a) في جوار $Z_1 = 1$

$$\frac{1}{Z-2} = \frac{1}{(Z-1)-1} = \frac{-1}{1-(Z-1)}$$

نعوض في $(x)$ بدل $Z$ نضع $(Z-1)$.

$$f(Z) = \frac{1}{Z-1} - \left(1 + (Z-1) + (Z-1)^2 + \dots\right) = \frac{1}{Z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (Z-1)^n$$

b) في جوار $Z_2 = 2$

$$\frac{1}{Z-1} = \frac{1}{(Z-2)+1} = 1 - (Z-2) + (Z-2)^2 + \dots$$

$$\frac{2Z-3}{Z^2-3Z+2} = \frac{1}{Z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (Z-2)^n$$

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة