كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

• سلسلة تايلور:

الدالة $f(z)$ التحليلية في النقطة z_0 وجوارها فإنّ سلسلة تايلور لدالة $f(z)$ بقوى $(z-z_0)$ هي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(z-z_0)^n \quad \dots (1)$$

c_n المعاملات والتي تُعطى بالعلاقة:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n=0,1,2,\dots$$

حيث Γ دائرة مركزها النقطة $z=z_0$ وتقع بالكامل داخل جوار النقطة z_0 حيث الدالة $f(z)$ تحليلية.

هذه الدائرة تمرّ خلال رع نقطة شاذة لدالة $f(z)$ قريبة من z_0 ويكون نصف قطر التقارب للسلسلة (1) هو المسافة بين z_0 وأقرب نقطة شاذّة منها.

أمثلة: الدالة $\ln(1+z)$، $(1+z)^{\alpha}$ يكون نصف قطر التقارب $R=1$ لسلسلة تايلور بقوى $z_0=0$ (بجوار z_0 أو بحول z_0).

الحل:

$$f_1(z)=\ln(1+z)\Rightarrow f_1(0)=\ln 1=0=c_0$$

$$f'(z)=\frac{1}{1+z}\Rightarrow c_1=\frac{f^{(1)}(0)}{1!}=\frac{1}{1!}=1$$

$$f^{(2)}(z)=\frac{-1}{(1+z)^2}\Rightarrow c_2=\frac{f_1^{(2)}(0)}{2!}=-\frac{1}{2!}$$

$$f_1(z)=0+z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\dots$$

$$\boxed{f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n} \quad \dots (2)$$

أقرب نقطة شاذة لـ $z_0=0$ هي -1 ⇐ رع وبالتالي نصف قطر التقارب $R=|-1|=1$

$$(3)\quad (1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+(n-1))}{n!}z^n+\dots$$

α قد تكون مقدار موجب أو سالب أو معدوم

نأخذ الحالة التي تكون $\alpha = -1$ (حالة هامة):

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \dots + (-1)^n z^n \quad (4)$$

مثال: أوجد سلسلة تايلور في جوار $z_0 = 0$ لدالة $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}$ ثمّ أوجد نصف قطر التقارب؟

الحل:

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z-3}$$

$$f(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

باستخدام الصيغة (4) ومجموع السلسلة الهندسية

$$f(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{1}{4}\left(1 - z + z^2 + \dots\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3} + \dots\right)$$

$$= -\frac{z}{3} + \frac{2}{3^2}z^2 - \frac{7}{3^2}z^3 + \dots$$

$R = 1$ هو نصف قطر التقارب

مثال: أوجد سلسلة تايلور بقوى $z = -3$ لدالة $f(z) = \frac{1}{3-2z}$

الحل:

$$f(z) = \frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3-2(z+3-3)} = \frac{1}{-3-2(z-3)}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}$$

نوظف في الصيغة (4) بدلاً من z نضع $\frac{2}{3}(z-3)$

$$f(z) = -\frac{1}{3}\left[1 - \frac{2}{3}(z-3) + \frac{2^2}{3^2}(z-3)^2 + \frac{2^3}{3^3}(z-3)^3 + \dots\right]$$

$$f(z) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}(z-3) + \frac{2^2}{3^2}(z-3)^2 + \dots$$

نصف قطر التقارب $R = \frac{3}{2}$

مثال: أوجد بعض معاملات سلسلة تايلور بقوى z للدالة $f(z) = \tan z$ ثمّ أوجد نصف قطر التقارب؟

الحل: نفرض أنّ السلسلة هي: $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$

حيث $c_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$, $n = 0, 1, \dots$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f^{(0)}(0) = f(0) = 0$

$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + f^2(z)$

(5)
$$\begin{cases} f''(z) = 2 f(z) \cdot f'(z) \\ f'''(z) = 2\left[f'^2(z) + f(z) \cdot f''(z)\right] \\ f^{(4)}(z) = 2\left[3 f'(z) \cdot f''(z) + f(z) \cdot f^{(3)}(z)\right] \\ f^{(5)}(z) = 2\left[3 f''^2(z) + 4 f'(z) \cdot f^{(3)}(z) + f(z) \cdot f^{(4)}(z)\right] \end{cases}$$

نعوض $z = 0$ في (5) نجد أن

$f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 16$

بالتالي نعوض بالشكل العام للسلسلة.

$$tg z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \dots$$

أقرب نقطة شاذة هي $\frac{\pi}{2}$ بالتالي $R = \frac{\pi}{2}$ (نصف قطر التقارب)

• لنفرض السلسلة

$$\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad (6)$$

إذا كانت $c_{-n} \neq 0$ وتحقق أن النهاية التالية موجودة ومحدودة

$$r = \lim_{n \to \infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|} \quad (7)$$

بالتالي إن السلسلة تتقارب في المنطقة $|z - z_0| > r$

مثال: أوجد منطقة تقارب السلسلة:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$

الحل:

$c_{-n} = (1+i)^{n+1}$; $r = \lim_{n \to \infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$

$c_{-n-1} = (1+i)^{n+2}$

$$r = \lim_{n \to \infty} \frac{|(1+i)^{n+2}|}{|(1+i)^{n+1}|} = \lim_{n \to \infty} |1+i| = \sqrt{2}$$

بالتالي السلسلة متقاربة في المنطقة

$|z - 0| > \sqrt{2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(in)}{(z+i)^n}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$$C_{-n} = \sin(in) = i\,sh\,n$$

$$C_{-n-1} = \sin(i(n+1)) = i\,sh(n+1)$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_{-n-1}|}{|C_{-n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|i\,sh(n+1)|}{|i\,sh\,n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{sh(n+1)}{sh\,n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sh(n+1)}{sh\,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{e^{n} - e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e - e^{-2n-1}}{1 - e^{-2n}} = e$$

المتسلسلة متقاربة في المنطقة

$$|z+i| > e$$

• نفترض المتسلسلة بالشكل:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \cdots (9)$$

تتقارب في المنطقة التي تتقارب فيها المتسلسلتين:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \cdots \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1 (z-z_0) + \cdots \quad (11)$$

إذا كانت المتسلسلة (10) تتقارب في المنطقة $|z-z_0| > r$ بالتالي فهي خارج الدائرة التي مركزها $z = z_0$ ونصف قطرها r والمتسلسلة (11) في المنطقة $|z-z_0| < \rho$ بالتالي إذا كان:

(1) $r < R$ بالتالي المتسلسلة متقاربة في كل مكان

(2) $r < R$ بالتالي المتسلسلة تتقارب في المنطقة $r < |z-z_0| < R$

$r \geq 0$; $0 < R < \infty$

مثال: أوجد منطقة تقارب المتسلسلة:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n}$$

الحل: من أجل المتسلسلة: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$ لدينا:

$$C_n = e^{-in-\frac{1}{2}} \qquad C_{n+1} = e^{-i(n+1)-\frac{1}{2}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = 1$$

أي السلسلة متقاربة في المنطقة $|z+1| < 1$

من أجل السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n}$

ومن أجل السلسلة: لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n}$

$$c_{-n} = e^{+in}$$

$$c_{-n-1} = e^{i(n+1)} \Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n-1}|}{|c_{-n}|} = 1$$

بالتالي السلسلة متقاربة في المنطقة $|z+1| > 1$

بالتالي السلسلة الأساسية متقاربة بكل مكان.

مثال: $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{6^n}$

الحل: ندرس تقارب كل من السلسلتين

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} \Rightarrow c_{-n} = (3+4i)^n \quad c_{-n-1} = (3+4i)^{n+1}$

$$\Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \frac{|(3+4i)^{n+1}|}{|(3+4i)^n|} = \lim_{n\to\infty} |(3+4i)| = 5$$

بالتالي منطقة تقارب هذه السلسلة $|z+2i| > 5$

② $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{6^n}$

أما السلسلة الثانية

$$c_n = 6^{-n} \quad c_n = 6^{-(n+1)} \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \frac{|6^{-n}|}{|6^{-(n+1)}|} = 6$$

السلسلة متقاربة من المنطقة $|z+2i| < 6$

$R > r$ إذاً السلسلة I الكلية منطقة تقارب السلسلة I

$$5 < |z+2i| < 6$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة