كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

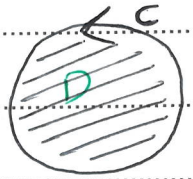
كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مبرهنة كوشي: ليكن c مسار مغلق بسيط موجّه بالاتجاه الموجب، $f(z_0)$ دالة تحليلية في المنطقة D بسيطة الترابط وعلى محيطها c

عندئذٍ $\int_c f(z)\,dz = 0$



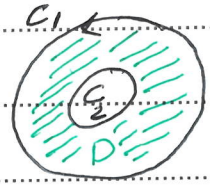
مثال: $I = \int_c e^z\,dz$ حيث $c: z = z(t) = e^{it}$ ، $0 \le t \le 2\pi$

الدالة e^z تحليلية داخل القرص $|z| \le 1$ بالتالي حسب مبرهنة كوشي

$$\int_c e^z\,dz = 0$$

مبرهنة: إذا كانت c_1 و c_2 مسارات مغلقات بسيطان موجّهان في الاتجاه الموجب و c_2 ضمن c_1 وكانت $f(z)$ تحليلية على المنطقة D المحصورة بين المنطقتين c_1 و c_2

فإنّ $\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{c_2} f(z)\,dz$

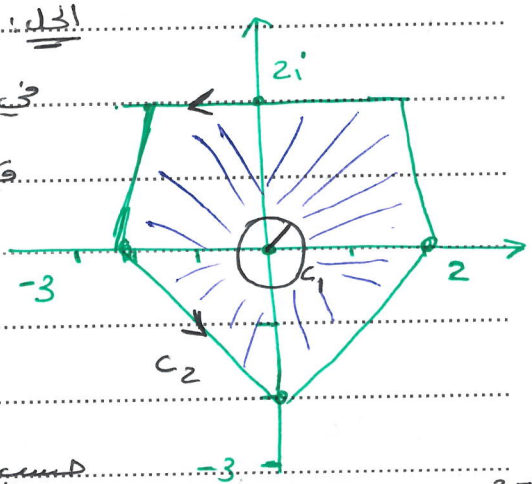


مثال: $I = \int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz$ حيث c_2 موضح بالشكل:

الحل: إنّ الدالة $\frac{1}{z}$ غير تحليلية في النقطة $z = 0$ نعزل الصفر ضمن دائرة صغيرة نصف قطرها ε فتصبح الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلية في المنطقة المحصورة بين c_2 و c_1 حيث:

$c_1 = z = z(t) = e^{it}$ معطى بالعلاقة c_1

$0 \le t \le 2\pi$



حسب المبرهنة ① يكون:

$$\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{c_2} f(z)\,dz \Rightarrow \int_{c_2} \frac{dz}{z} = \int_0^{t} \frac{i\,e^{it}}{e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = it\Big|_0^{2\pi}$$

$$= i2\pi - 0 = i2\pi$$

علاقة كوشي التكاملية:

مبرهنة (2): إذا كانت الدالة $f(z)$ في D و c حلقة مغلقة ملساء محدودة فإن علاقة كوشي التكاملية على هذه الحلقة تعطى بالشكل:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \qquad ; \quad z_0 \in D \qquad \cdots (1)$$

تعريف: يسمّى المنحني c أملس جزئياً إذا تكوّن من عدد منتهٍ من المنحنيات الملساء موصولة ببعضها نهاية السابق مع بداية اللاحق وهذا النوع من المنحنيات يسمّى مسار.

مثال: احسب قيمة التكامل $\int_c \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\,dz$ باستخدام علاقة كوشي التكاملية

حيث: ① $c: |z-2| = 1$

② $c: |z-2| = 3$

③ $c: |z-2| = 5$

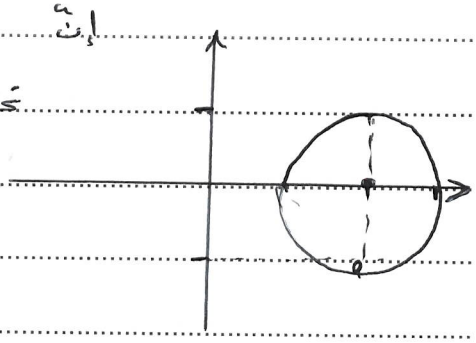
الحل: $z^2 - 6z = z(6-z)$ حيث $z_0 = 0$ و $z_1 = 6$

① $|z-2| = 1$

إذاً الدالة $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}$ و $0 \notin c$ و $6 \notin c$

تحليلية داخل الجرص وعلى محيطه

$|z-2| \le 1$



بالتالي حسب نظرية كوشي

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

② $|z-2| = 3$

$$\int_c \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\,dz = \int_c \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}\,dz$$

حيث $f_2(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ دالة تحليلية على الجرص $|z-2| \le 3$

بالتالي نطبق علاقة كوشي التكاملية

$$\int_c \frac{f_2(z)}{(z-0)}\,dz = 2\pi i\, f_2(z_0) = 2\pi i\, f_2(0)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}\,dz = 2\pi i\,\frac{e^0}{0-6} = -\frac{\pi}{3}i$$

$|z-2| = 5$ ③

$z_0 = 0$ و $z_1 = 6$ موجودين ضمن c إذاً

$$\int_c \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}\,dz$$

إذاً $f_3(z) = e^{z^2}$ دالة تحليلية على الحرص $|z-2| \le 5$

$$\frac{1}{z(z-6)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-6} \Rightarrow \frac{1}{z(z-6)} = \frac{1}{6z} + \frac{1}{6}\,\frac{i}{z-6}$$

$$\int_c \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}\,dz = -\frac{1}{6}\int \frac{e^{z^2}}{z}\,dz + \frac{1}{6}\int \frac{e^{z^2}}{z-6}\,dz$$

$$= -\frac{1}{6}(2\pi i f_3(z_0))^c + \frac{1}{6}(2\pi i) f_3(z_1)^c$$

$$= -\frac{\pi}{3}i\,e^0 + \frac{\pi}{3}i\,e^{36} = -\frac{\pi}{3}i\,(1-e^{36})$$

تمرين: احسب قيمة التكامل $\int_{|z|=2} \frac{ch(iz)}{z^2+4z+3}$

الناتج سيكون $\pi i \cos 1$

علاقة كوشي التكاملية العامة: ضمن شروط صحة البرهنة $f(z)$ يكون:

$$\int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال: احسب قيمة التكامل: $\int_c \frac{\cos z\,dz}{z^3(z-1)}$

حيث c هو:

① $c_1 : |z| = \frac{1}{3}$

② $c_2 : |z-i| = 3$

③ $c_3 : |z-1| = \frac{1}{3}$

الحل: ① $z^3(z-1)$ لدينا $z_0 = 0$ و $z_1 = 1$

$$\int_c \frac{\frac{\cos z}{z-1}}{z^3}\,dz \quad ; \quad f_1(z) = \frac{\cos z}{z-1}$$

الدالة $f_1(z)$ تحليلية على $|z| \le \frac{1}{3}$

$$f_1'(z) = \frac{\sin z\,(z-1) - \cos z}{(z-1)^2}, \quad f_1''(z) = \frac{-\cos z\,(z-1)^3 + \sin z\,(z-1)^4 \cos z}{(z-1)^4}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int_c \frac{f_1(z)\,dz}{z^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \pi i\,(2) = 2\pi i$$

السلاسل في الفضاء المقدي:

ليكن لدينا $$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \dots (4)$$

حيث $z_i \in \mathbb{C}$ و $i = 1, 2, \dots$ و $z_n = x_n + i y_n$

السلسلة (4) متقاربة إذا وفقط إذا تقاربت السلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots \quad (6)$$

السلسلة (4) تسمى متقاربة مطلقاً إذا كانت السلسلة

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \quad \dots (7)$$

السلاسل (5) و (6) و (7) هي سلاسل ذات قيم حقيقية ودراسة تقاربها هي نفس الطرق التي تُتخدم لدراسة تقارب السلاسل الحقيقية (دالامبير - المقارنة - كوشي ....)

مثال (1): ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n + i \sin n)}{n^2}$$

ندرس تقارب السلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

كل من هذه السلسلتين متقاربة بالإطلاق بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ متقاربة مطلقاً.

مثال (2): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$ حيث $e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}}_{\text{متباعدة}} + i \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}}_{\text{متقاربة}} \Rightarrow$$

إذن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$ متباعدة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

سلسلة القوى: لها الشكل $c_0+c_1z+c_2z^2+\dots+c_nz^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ ... (8)

c_0 و c_1 ثوابت عقدية

و z متغير عقدي.

نظرية آبل: إذا كانت السلسلة (8) متقاربة في النقطة $z=z_0$ بالتالي هي متقاربة

مطلقاً من أجل أي z يحقق أنّ $|z|<|z_0|$.

وإذا كانت متباعدة في $z=z_1$ بالتالي فهي متباعدة من أجل أي z يحقق أنّ

$|z|>|z_0|$

إنّ مجال تقارب السلسلة (8) هو دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها يعطى بالعلاقة

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$; $c_n\neq 0$ ... (9)

أو $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ ... (10)

مثال: أوجد نصف قطر تقارب سلسلة القوى: $\sum_{n=0}^{\infty}\cos in\,.z^n$; $c_n=\cos in$

الحل: إمّا أن نطبق العلاقة (9) أو العلاقة (10) ; لدينا

$c_n=\cos in=\frac{e^{-n}+e^{n}}{2}$

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|\operatorname{ch} n|}{|\operatorname{ch}(n+1)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} n.\operatorname{ch}1+\operatorname{Sh} n.\operatorname{Sh}1}=$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\operatorname{ch}1+\underbrace{\operatorname{Th} n}_{\operatorname{Th}\infty=1}.\operatorname{sh}1}=\frac{1}{\operatorname{ch}1+\operatorname{sh}1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\operatorname{Th} n=\frac{e^{n}-e^{-n}}{e^{n}+e^{-n}}=$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}}=1$

مثال: أوجد نصف قطر التقارب للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n.z^n$

الحل: نستخدم الصيغة (10)

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\frac{1}{\sqrt[n]{|1+i|^n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n/2}}}$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة