كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي ١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

لإثبات أنّ الدالة تحليلية: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (الشرطان في الإحداثيات الديكارتية)

أمّا في الإحداثيات القطبية: (ρ, θ)

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

لدينا:

$$z = x + iy \Rightarrow dz = dx + i\,dy$$

$$z = \rho\, e^{i\theta} \Rightarrow dz = e^{i\theta}\, d\rho + i\rho\, e^{i\theta}\, d\theta$$

$$dz = [\cos\theta + i\sin\theta]\, d\rho + i\rho\, [\cos\theta + i\sin\theta]\, d\theta$$

$$dz = \cos\theta\, d\rho + i\sin\theta\, d\rho + i\rho\cos\theta\, d\theta - \rho\sin\theta\, d\theta$$

$$dz = (\cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta) + i(\sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$; \quad dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta$$

$$dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \left(-\frac{1}{\rho\sin\theta}\right)} \quad \text{---} (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho\cos\theta}} \quad (2)$$

إذن $(1) = (2)$ بالتالي:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho\sin\theta} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho\cos\theta}$$

نضرب الطرفين بـ $\sin\theta \cos\theta$

$$\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\cos\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} = \cos\theta\,\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\sin\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

بمطابقة أمثال $\sin\theta$ و $\cos\theta$ في الطرفين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$ شرطي كوشي ريمان بالصورة القطبية

أمّا انطلاقاً من الشرط الديكارتي الثاني (*) $\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\cdot\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{-1}{\rho\sin\theta}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{1}{\rho\cos\theta}} \quad (2)$$

نعوّض (1) و (2) في (*) ثم نضرب الطرفين ب ($\sin\theta\cdot\cos\theta$):

$$-\sin\theta\,\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} = \cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\sin\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

بمطابقة أمثال $\sin\theta$ و $\cos\theta$:

أمثال $\sin\theta$: $\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}$ ، أمثال $\cos\theta$: $\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \rho}$

ملاحظة (1) : إذا كانت لدينا $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ دالة تحليلية في D

بالتالي تتحقق المساواة :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

الإثبات : بما أنّ الدالة $f(z)$ تحليلية بالتالي فهي تحقق شرطي كوشي ريمان في D :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

نعوض (4) في (3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ملاحظة (2) : إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية في D وكان القسم التخيلي معدوم في D فإنّ $f(z) = c = const$

الاثبات: لدينا $F(z) = w = u + iv$; $v = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ $\quad$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$u' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow u = \iint u'\, dx\, dy = c \Rightarrow F(z) = c$

وبالمثل يمكن الاثبات أنّه إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية وتحتوي القسم التخيلي فقط

أي $u = 0$ حيث $c = const$ و $f(z) = ic$

• ديكارتياً $z = x + iy \Rightarrow f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

الدالة ديكارتياً

• قطبياً $z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow F(z) = R(x,y) \cdot e^{i\Phi(x,y)}$

الدالة قطبياً $\quad$ لـ دالة الطويلة $\quad$ ما دالة السعة

• شرطي كوشي ريمان للدالة: $f(x,y) = R(x,y)\, e^{i\Phi(x,y)}$ هما:

$\frac{\partial R}{\partial x} = R \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = -R \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}$

الاثبات: $f(z) = R \cdot e^{i\Phi} = R\,[\cos\Phi + i \sin\Phi]$

$u = R \cdot \cos\Phi \qquad v = R \sin\Phi$

لدينا $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \cos\Phi - R \cdot \sin\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \sin\Phi + R \cdot \cos\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ $\qquad$ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\Leftarrow \frac{\partial R}{\partial x} \cos\Phi - R \sin\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} \sin\Phi + R\cos\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}$

نطابق أمثال $\sin\Phi$ و $\cos\Phi$ في الطرفين:

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial x} = R \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial y} = -R \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{array}\right\} \rightarrow$ شرطي كوشي ريمان للدالة بدلالة R و Φ.

مثال: بفرض: $F(z) = (x^2+y^2) \cdot e^{ix}$ هل الدالة تحليلية ؟

• نطبق الشرط R و Φ حيث $\Phi = x$ و $R = x^2 + y^2$:

$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial R}{\partial x} = 2x & \frac{\partial R}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ لم يتحقق شرطي كوشي ريمان

فالدالة غير تحليلية

تعريف: نسمي الدالة $u(x,y)$ توافقية في المجال D إذا كانت تمتلك مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة الثانية وتحقق معادلة لابلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

مثال: أثبت أن الدالة $u=x^2+2x-y^2$ توافقية؟

الحل:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

$\Rightarrow$ المشتقات موجودة ومستمرة حتى المرتبة الثانية

معادلة لابلاس محققة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$

فالدالة u توافقية

• الدالة التحليلية $F(z)=u+iv$ على المجال D بالتالي فإن الجزء الحقيقي والتخيلي هي دوال توافقية في هذا المجال والعكس ليس صحيحاً دائماً أي إذا كانت u_1 و u_2 دالتين توافقيتين بالتالي الدالة العقدية $f_1=u_1+iu_2$ ليست بالضرورة تحليلية وإذا تحقق أن الدالة F_1 تحليلية نقول عن u_1 و u_2 أنهما دالة توافقية تناظرية.

مثال: تحقق أن الدالتين $u=x$ و $v=-y$ توافقية وهل الدالة $f(z)=u+iv$ تحليلية؟

الحل:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ معادلة لابلاس محققة ومنه فإن u توافقية

v توافقية $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

الدالة $F(z)=x-iy$ ليست تحليلية لا تحقق لشرطي كوشي ريمان

مثال (2): $u=3(x^2-y^2)$ و $v=3x^2y-y^3$ هل الدالتين u و v توافقيتان أم لا؟ وهل الدالة $F=u+iv$ تحليلية؟

الحل: $u=3x^2-3y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -6y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6$
$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6-6=0$ تحقق معادلة لابلاس فالدالة u توافقية.

$v = 3x^2y - y^3$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6y$
$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y$
$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 6y - 6y = 0$

الدالة v توافقية

$f = 3(x^2-y^2) + i\,[3x^2y - y^3]$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$
$-\frac{\partial u}{\partial y} = 6y \neq \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$
$\Rightarrow$ الدالة $u+iv$ ليست تحليلية.

تمرين: أوجد كل الدوال التوافقية بالشكل: $u = f(x^2+y^2)$, عيّن الثوابت

الحل: نضع $t = x^2+y^2$ بالتالي $u = f(t)$, الدوال توافقية بالتالي يجب تحقق معادلة لابلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,

لدينا $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f'(t) \cdot (2x)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(t) \cdot (2x) \cdot \frac{dt}{dx} + 2f'(t) = f''(t)\,(4x^2) + 2f'(t)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = f'(t) \cdot (2y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(t) \cdot (2y) \cdot \frac{dt}{dy} + 2f'(t) = f''(t) \cdot (4y^2) + 2f'(t)$

$4x^2 \cdot f''(t) + 2f'(t) + 4y^2 \cdot f''(t) + 2f'(t) = 0$

$4x^2 \cdot f''(t) + 4y^2 \cdot f''(t) + 4f'(t) = 0$

$(x^2+y^2)\,f''(t) + f'(t) = 0$

$t\,f''(t) + f'(t) = 0$

نضرب الطرفين بـ t: $t^2 f''(t) + t\,f'(t) = 0$

وهي معادلة أولر لها الحل العام: $f(t) = c_1 \ln t + c_2$; $c_1, c_2 = const$

وهي مجموعة الدوال التوافقية $u = f(x^2+y^2) = c_1 \ln(x^2+y^2) + c_2$

• تكامل الدوال العقدية:

إذا كانت الدالة $F(z)$ معرّفة ومستمرة على D و G منحني أملس يقع داخل D

إذا كانت $z = x+iy$ و $F(z) = u+iv$ حيث $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$

دوال حقيقية بالنسبة لـ x و y بالتالي تكامل F على المنحني G يُعطى بالشكل:

$$\int_G f(z)\,dz = \int_G (u\,dx - v\,dy) + i\int_G (v\,dx + u\,dy) \quad \text{④}$$

التكامل متعلق بالمنحني G

← إذا كانت الدالة $F(z)$ تحليلية على D المتصلة بالتالي التكامل لا يتعلق بـ G.

حيث L أي منحني أملس مغلق داخل D $\qquad \int_L F(z)\,dz = 0 \quad \text{⑤}$

← إذا كانت الدالة $F(z)$ معرفة ومستمرة على D والمنحني الأملس G معطى بالعلاقة

$x = x(t)$ و $y = y(t)$ ونقطتي البداية والنهاية لـ G $t = t_1$ و $t = t_0$

بالتالي $\int_G f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} [z(t)] \cdot z'(t) \cdot dt \quad \text{⑥}$

و $z(t) = x(t) + i\,y(t)$

← إذا كانت الدالة $F(z)$ تحليلية في المنطقة المتصلة D وتحوي النقاط z_0 و z_1

وبالتالي علاقة نيوتن - ليبنز محققة

$$\int_{z_0}^{z_1} F(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$$

حيث $F(z)$ تحقق أنّ $F'(z) = f(z)$ في D

← إذا كانت الدالتين F و v تحليلية في المنطقة المتصلة D . z_1 و z_0 نقاط

معلومة في هذه المنطقة بالتالي التكامل بالتجزئة

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) \cdot v'(z) \cdot dz = \big[f(z) \cdot v(z)\big]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} v'(z) \cdot f'(z) \cdot dz$$

مثال: أوجد قيمة التكامل: $\int_c (1+i-2\bar{z})\,dz$ حيث:

1) c هو المستقيم المار بالنقطتين $z_0 = 0$ و $z_1 = 1+i$ ؟

2) القطع $y = x^2$ و z_1 و z_0 نقاط من c ؟

3 - المثلث z_2 و z_1 و z_0 و $z_2 = 1$ ؟

الحل: سنستخدم التكامل الأول

$$f(z) = 1+i-2\bar{z} = 1+i-2x+2iy = 1-2x+i(1+2y) \quad (1$$

$$u = 1-2x \qquad v = 1+2y$$

معادلة المستقيم المار بالنقطتين z_0 و z_1 هي $y=x$

نوحّد التكامل إمّا لـ x أو لـ y حيث $0 \le x \le 1$

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c u\,dx - v\,dy + i\int_c v\,dx + u\,dy$$

$$\int_c f(z)\,dz = \int_0^1 (1-2x)-(1+2x)\,dx + i\int_0^1 (1+2x+1-2x)\,dx$$

$$\int_c f(z)\,dz = \int_0^1 (1-2x-1-2x)\,dx + i\int_0^1 2\,dx$$

$$\int_c f(z)\,dz = \int_0^1 (-4x)\,dx + 2i = 2(i-1)$$

حل الطلبين 2) و 3) وظيفة

انتهت المحاضرة