كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

• الأعداد العقدية يرمز لها بـ $\mathbb{C}$ و العدد العقدي بالشكل (x,y) حيث $x,y \in \mathbb{R}$

وعرّف عليه عمليتين:

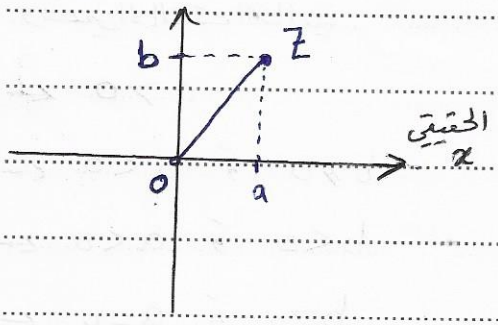
1) الجمع: $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

2) الضرب: $(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$

• الحايد الجمعي $(0,0)$ والحايد الضربي $(1,0)$

يُكتب العدد العقدي جبرياً (x,y)

• كتابة العدد العقدي بيانياً:



$z=(a,b)$

$Re(z)=a \quad \& \quad Im(z)=b$

• لنعرّف العدد العقدي $i=(0,1)$ فيكون

$i^2=(0,1).(0,1)=-1$ وفق قانون الجداء

• لنفرض لدينا $z=(x,y)$ وهو عدد عقدي يمكن كتابته بالشكل:

$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy$

وهي الصيغة الديكارتية لعدد عقدي حيث $Re(z)=x$ و $Im(z)=y$

• لنفرض لدينا: $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ فيكون

• $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

• $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

• $z_1*z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

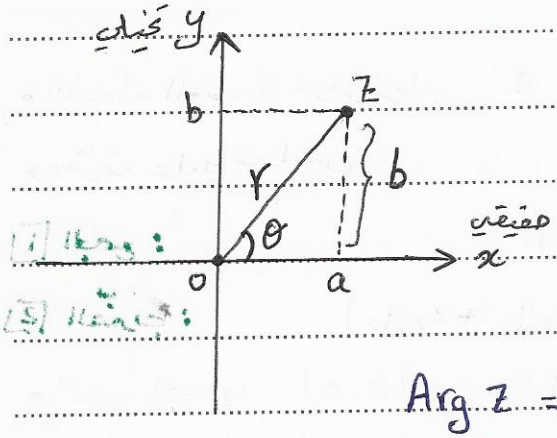
• $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\left(\frac{-x_1y_2+y_1x_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$

TEL:0931497960 - (جامعة طرطوس) كلية العلوم - مكتبة A to Z

• طول العدد العقدي نرمز له بـ r حيث: $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

• الإحداثيات القطبية لعدد عقدي: لإيجاد الإحداثيات القطبية نوجد r (طويلة العدد العقدي) ونوجد $\theta = Arg(z)$ وتسمى سعة العدد العقدي

من الرسم البياني:



$a = r.\cos\theta$

$b = r.\sin\theta$

فيكون $(z = a+ib)$ بالشكل القطبي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

• كيفية إيجاد θ:

$$Arg\,z = \arg z + 2\pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

حيث السعة الأساسية $-\pi < \arg z \leq \pi$

ونميز الحالات التالية:

- $a > 0$ ← $\arg z = \arctan\frac{b}{a}$
- $b \geq 0$ و $a < 0$ ← $\arg z = (\arctan\frac{b}{a}) + \pi$
- $b < 0$ و $a < 0$ ← $\arg z = -\pi + \arg\tan\frac{b}{a}$
- $b > 0$ و $a = 0$ ← $\arg z = \frac{\pi}{2}$
- $b < 0$ و $a = 0$ ← $\arg z = -\frac{\pi}{2}$

نذكر العلاقات التالية: $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ & $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال: $z = 1-i$ المطلوب كتابته بالشكل القطبي؟

$a = 1 \;,\; b = -1 \Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan\frac{b}{a} + 2\pi.k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$ لدينا $a > 0$

$\theta = \arctan(-1) + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $Z = 3 - 2i$ المطلوب كتابته بالشكل المثلثي؟

$a = 3 \quad b = -2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\theta = \arctg \frac{b}{a} + 2\pi . k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$ لدينا a ≠ 0 بالتالي:

$\theta = \arctg \left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi . k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$Z = \sqrt{13} \left(\cos \left(\arctg \left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi . k \right) + i \sin \left(\arctg \left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi . k \right) \right)$

• العمليات على الأعداد العقدية في الصورة القطبية:

نفرض $Z_1 = r_1 \cos\theta_1 + i r_1 \sin\theta_1$ و $Z_2 = r_2 \cos\theta_2 + i r_2 \sin\theta_2$

1) $Z_1 + Z_2 = (r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2) + i (r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2)$

2) $Z_1 * Z_2 = r_1 . r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \right]$

3) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \right]$

• إذا كانت $Z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ فإن:

$Z^2 = Z . Z = r^2 \left[\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \right]$

$Z^3 = Z^2 . Z = r^3 \left[\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) \right]$

⋮

$Z^n = r^n \left(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \right)$

من هنا نحصل على علاقة دي موافر حيث:

$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

وظيفة: احسب $\sin 3\theta$ و $\sin 4\theta$ و $\cos 3\theta$.

• حساب $\sin 3\theta$: نفرض $Z = \cos\theta + i \sin\theta$

$Z^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta \Rightarrow \sin 3\theta = Im(Z)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$Z^3 = \cos^3\theta + i^3 \sin^3\theta + i 3 \cos^2\theta \sin\theta + 3 \cos\theta \, i^2 \sin^2\theta$

$Z^3 = \cos^3\theta - i \sin^3\theta + 3i \cos^2\theta . \sin\theta - 3 \cos\theta \sin^2\theta$

$Z^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta - i \sin^3\theta + 3i \cos^2\theta . \sin\theta$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$z^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta) + i\underbrace{(3\cos^2\theta\cdot\sin\theta - \sin^3\theta)}_{Im(z)}$

$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

$= 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta$

$= 3 - 3\sin^3\theta - \sin^3\theta + 3\sin\theta$

$\boxed{\sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta}$

• خواص: ليكن لدينا $z = a+ib$ بالقاطع، $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

الاثبات لـ (3): بفرض $z_1 = a_1+ib$ و $z_2 = a_2+ib$

$z_1+z_2 = (a_1+a_2) + i(b_1+b_2)$ $\quad |z_1| = \sqrt{a_1^2+b_1^2}$

$|z_2| = \sqrt{a_2^2+b_2^2}$ $\quad |z_1+z_2| = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$

لدينا $|z_1+z_2| = (a_1^2+2a_1a_2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+2b_1b_2)^{1/2}$

$= \left((a_1^2+b_1^2)+(a_2^2+b_2^2)+2(a_1a_2+b_1b_2)\right)^{\frac{1}{2}}$

$\leq \sqrt{a_1^2+b_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2} = |z_1| + |z_2|$

لـ متراجحة منكوفسكي

4) $|z_1+z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

5) $|z_1-z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

• المرافق: يرمز لهُ بـ $\bar{z}$ حيث: $\bar{z} = a-ib$; $|\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

• $|z\cdot\bar{z}| = |z|^2$

• يمكن حساب القسم الحقيقي والقسم التخيلي لعدد ما باستخدام المرافق حيث:

$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الإثبات: بفرض $z = a+ib$ وبالتالي: $\bar{z} = a-ib$

$Re(z) = \frac{a-ib+a+ib}{2} = \frac{2a}{2} = a$ حقيقة

$Im(z) = \frac{a+ib-a+ib}{2i} = \frac{ib}{2i} = b$ تخيلية

• تتمة الخواص.

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$z.\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2-ixy+ixy = |z|^2$

• علاقة أويلر: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

• الشكل الأسي لعدد عقدي: $z = r(\cos\theta+i\sin\theta) = r.e^{i\theta}$

تمرين: اكتب بالشكل الأسي $z = -1+2i$

الحل: $a=-1 \quad b=2 \Rightarrow r = \sqrt{(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\theta = \pi + arctg\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi.k \quad ; \quad k \in Z$

$\theta = \pi + arctg\left(\frac{2}{-1}\right) + 2\pi.k = \pi + arctg(-2) + 2\pi.k$

$z = \sqrt{5}.e^{i(\pi+arctg(-2)+2\pi.k)}$

• بفرض لدينا العددان $z_1 = x_1+iy_1$ و $z_2 = x_2+iy_2$

$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2$ & $y_1 = y_2$

وإذا كان z_1 و z_2 مكتوبان بالشكل الأسي فإن:

$z_1 = z_2 \iff \theta_1 = \theta_2$ أو $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi.k$

تمرين: $(4x+5y)+i(2x-3y) = 13+i$

أوجد قيمة x و y ؟

الحل: (نقوم بمساواة القسم الحقيقي في الطرف الأول مع القسم الحقيقي في الطرف الثاني والقسم التخيلي في الطرف الأول مع القسم التخيلي في الطرف الثاني)

$\begin{cases} 4x+5y = 13 & ① \\ 2x-3y = 1 & ② \end{cases}$

$(-2) \times ②$ نضرب المعادلة ② بـ

$\begin{cases} 4x+5y = 13 \\ -4x+6y = -2 \end{cases}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بجمع المعادلتين السابقتين $11y = 11$

$\Rightarrow \boxed{y = 1}$

بعوض في ① $4x + 5(1) = 13$

$4x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z