كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك ١

المحاضرة : التاسعة /نظري/

النظريات العامة في تحريك النقطة المادية

رأينا أن معادلات حركة النقطة المادية هي معادلات تفاضلية من المرتبة الثانية ويلزم مكاملتها مرتين. إلا أنه يمكن تخفيض مرتبة تلك المعادلات وتحويلها لمعادلات تفاضلية من المرتبة الأولى عن طريق استخدام النظريات العامة في التحريك:

1 - نظرية كمية الحركة:

لتكن M نقطة مادية كتلتها m وسرعتها $\vec{v}$ فإن متجه كمية الحركة لهذه النقطة المادية $m\vec{v}$.

نفترض أن كتلة النقطة المادية ثابتة في دراستنا.

إن القانون الأساسي في التحريك:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \qquad (1)$$

وهذه الصيغة تعبر عن نظرية كمية الحركة للنقطة بشكل تفاضلي:

((مشتق كمية الحركة لنقطة مادية بالنسبة للزمن يساوي القوة المؤثرة في هذه النقطة)).

نضرب طرفي (1) بـ dt:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}.dt$$

تدعى العبارة $\vec{F}.dt$ بدفع القوة الجزئي.

بمكاملة المعادلة السابقة بين اللحظتين t_0 , t (v_0 , v) نجد:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}.dt = \vec{q} \qquad (2)$$

يعبر عن $\int_{t_0}^{t} \vec{F}.dt = \vec{q}$ دفع القوة $\vec{F}$ خلال الفترة $t - t_0$

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{q} \qquad (2)$$

وبالتالي نظرية كمية الحركة في شكل تكاملي تنص :

((تغير كمية الحركة لنقطة مادية خلال فترة زمنية محددة يساوي دفع القوة المؤثرة خلال هذه الفترة))

إذا أثرت على النقطة المادية عدة قوى $\vec{F}_n$, ... , $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ فإن نظرية كمية الحركة تبقى كما هي لأنه يمكن الاستعاضة عن هذه القوى بمحصلة $\vec{F}$:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \dots + \vec{q}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i \qquad (3)$$

حيث $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$ دفع القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ على الترتيب خلال الفترة $t - t_0$.

إن المعادلة المتجهية (3) تكافئ ثلاث معادلات عددية على المحاور الاحداثية :

$$m v_x - m v_{0x} = \sum_{i=1}^{n} q_{ix}$$
$$m v_y - m v_{0y} = \sum_{i=1}^{n} q_{iy}$$
$$m v_z - m v_{0z} = \sum_{i=1}^{n} q_{iz}$$

تمرين :

تبلغ سرعة سيارة قبل الجمط $v = 72\ Km/h$. كم ينبغي أن تكون قيمة عامل الاحتكاك f بين الطريق وعجلات السيارة من أجل أن تتوقف هذه السيارة بعد مرور ست ثواني من الجمط .

الحل :

$\vec{F}$ قوة الاحتكاك

$$\vec{F} = f\vec{N} = f\vec{P}$$

$\vec{P}$ وزن السيارة .

إعتبار السيارة كنقطة مادية . بتطبيق نظرية كمية الحركة :

$$mv_2 - mv_1 = \int_0^6 F\,dt = -\int_0^6 F\,dt = -6F = -6fP$$

$$v_1 = \frac{72000}{3600}\ m/s \quad , \quad v_2 = 0\ m/s$$

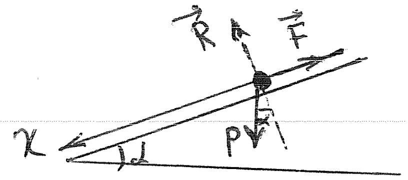
بالتعويض والاختصار على m :

$$-\frac{72000}{3600} = -6fg \quad ; \quad g = 9.8\ m/s^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f = 0.34}$$

تمرين :

يتحرك جسم نحو الأسفل على مستوٍ خشن يميل على الأفق بزاوية قدرها α . فإذا علمت أن عامل احتكاك الحركة يساوي f وأن الحركة بدأت بسرعة مقدارها v فالمطلوب حساب الفترة الزمنية اللازمة حتى تتضاعف سرعة هذا الجسم .



الحل :

تؤثر في الجسم القوى التالية :

$\vec{P}$ قوة الثقالة و $\vec{R}$ رد الفعل الناظمي و $\vec{F}$ قوة الاحتكاك :

$$F = fN = fP\cos\alpha$$

من نظرية كمية الحركة :

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \overset{\text{القوة الخارجية}}{\vec{F}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{P} - \vec{F})\, dt$$

بملاحظة أن $v_2 = 2v_1 = 2v$

بالإسقاط على المحور x : $2mv - mv = (P\sin\alpha - F)(t_2 - t_1)$

$$mv = (P\sin\alpha - fP\cos\alpha)T \quad ; \quad T = t_2 - t_1$$

ومنه الفترة الزمنية T اللازمة لتضاعف سرعة الجسم تعطى بالعلاقة :

$$T = \frac{mv}{P(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = \frac{v}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$$

خفض المرتبة للمعادلة

ملاحظة: نعلم أن : $m\vec{\gamma} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$

1) إذا كانت $\vec{F} = 0 \Leftarrow$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{P} = m\vec{v} = \vec{C} \quad \begin{cases} x' = c_1 \\ y' = c_2 \\ z' = c_3 \end{cases}$$

2) إذا كانت القوة $\vec{F}$ ثابتة الاتجاه :

لنفرض مثلاً أن $\vec{F} \parallel \vec{Oz}$ أي أن $F_x = F_y = 0$

وبالتالي :

$$\left.\begin{aligned} F_x = 0 &\Rightarrow m x'' = 0 \Rightarrow x'' = 0 \Rightarrow x' = c_1 \Rightarrow \frac{x'}{c_1} = 1 \\ F_y = 0 &\Rightarrow m y'' = 0 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow y' = c_2 \Rightarrow \frac{y'}{c_2} = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{x'}{c_1} = \frac{y'}{c_2} = 1$$

$$\Longrightarrow x' c_2 - y' c_1 = 0 \quad (*)$$

(إن الشكل العام لمعادلة المستوي هي $px+qy+rz+h=0$)

إذاً المستوي الممثل بالمعادلة (*) يوازي المحور oz وذلك لأن ناظم المستوي عمودي على oz (ليس له مركبة على oz أي $r=0$)

3) إذا كانت $\vec{F}$ عمودية على أحد المحاور الاحداثية ولكن ox مثلاً

$$\Rightarrow F_x=0 \Rightarrow x''=0\ ,\ x'=c$$

2- نظرية العزم الحركي (نظرية عزم كمية الحركة):

نأخذ القانون الأساسي في التحريك

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$

نضرب طرفيه متجهياً بـ $\vec{r}$ المحدد للنقطة M :

$$m\left(\vec{r}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt}\right)=\vec{r}\wedge\vec{F} \qquad (1)$$

ولكن:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\vec{v})=\vec{v}\wedge\vec{v}+\vec{r}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{r}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt}$$

نعوض في العلاقة (1)

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge m\vec{v})=\vec{r}\wedge\vec{F} \qquad (2)$$

$\vec{r}\wedge\vec{F}$ يعني عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للمركز o و $\vec{r}\wedge m\vec{v}$ عزم كمية الحركة بالنسبة للمركز نفسه .

(2) هي عبارة عن نظرية عزم كمية الحركة للنقطة M بالنسبة للمركز o وتدعى اختصاراً بنظرية العزم الحركي وتنص:

((المشتق الزمني للعزم الحركي لنقطة مادية بالنسبة لمركز ما يساوي عزم القوة المؤثرة في هذه النقطة بالنسبة لهذا المركز)).

ويمكن كتابة (2) :

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_o=\mathcal{M}_o(\vec{F})$$

بأخذ المساقط على المحاور الاحداثية الديكارتية:

$$\vec{r}\times m\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ mx' & my' & mz'\end{vmatrix}=m(yz'-y'z)\vec{i}+m(x'z-xz')\vec{j}+m(xy'-x'y)\vec{k}$$

وبالتالي بالإسقاط لنظرية العزم الحركي (2) على المحاور :

$$m\frac{d}{dt}(y\dot{z}-\dot{y}z) = yF_z - zF_y = M_{ox}(F)$$

$$m\frac{d}{dt}(\dot{x}z-x\dot{z}) = zF_x - xF_z = M_{oy}(F)$$

$$m\frac{d}{dt}(x\dot{y}-\dot{x}y) = xF_y - yF_x = M_{oz}(F)$$

قانون مصونية العزم الحركي :

إذا كان خط تأثير القوة المؤثرة في النقطة المادية (حامل القوة) (أو خط تأثير محصلة القوى المؤثرة في النقطة) يمر دائماً بمركز ثابت فإن عزم كمية الحركة لهذه النقطة (العزم الحركي) بالنسبة لهذا المركز تكون ثابتاً.

سؤال أي أنه من المساواة (2) لدينا : $\vec{r}\wedge\vec{F}=0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge m\vec{v})=0 \Rightarrow \vec{r}\wedge m\vec{v} = \vec{G} = Const \quad (3)$$

أي أن متجه العزم الحركي ثابت .

- تكون هذه الحالة عندما تكون القوة المؤثرة على النقطة المادية قوة مركزية ،

(تذكرة القوة المركزية : هي تلك القوة التي يمر خط تأثيرها خلال فترة الحركة من مركز ثابت).

ويتبين أن حركة النقطة تكون واقعة في مستو عامودي على $\vec{G}$ (أي عمودي على $\vec{r}\wedge\vec{v}$).

سؤال • وفي هذه الحالة تكون حركة النقطة خاضعة لقانون السطوح :

بما أن القوة مركزية فإن العلاقة (3) محققة ⟸ بأخذ القيمة العددية للعلاقة (3) بعد تقسيم طرفيها على m :

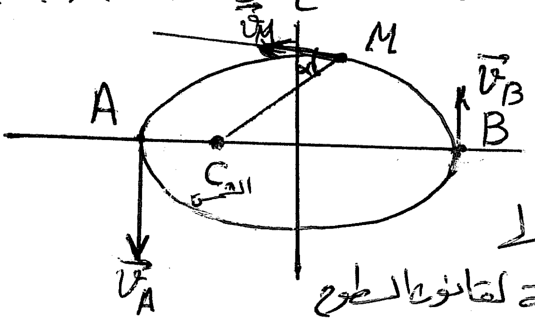
$$|\vec{r}\wedge\vec{v}| = Const$$

$$|\vec{r}\wedge\vec{v}| = 2\,W = Const$$

حيث W قيمة السرعة السطحية لحركة النقطة بالنسبة للمركز الذي

تمر بـ القوة المفروضة و هذا السرعة ثابتة ← الحركة خاضعة لقانون السطوح.

تمرين: أوجد العلاقة بين سرعتي كوكب في أقرب و أبعد نقطتين عن الشمس ثم أوجد سرعة هذا الكوكب في الموضع M إذا علمت أن سرعته في هذا الموضع تصنع زاوية قدرها $\alpha = 60°$ مع قوة التجاذب (الجذب) وأن: $\frac{CB}{CM} = \frac{3}{2}$



الحل:

القوة المؤثرة على الكوكب هي قوة مركزية حاملها يمر من نقطة ثابتة (الشمس) ← الحركة خاضعة لقانون السطوح

$$\Rightarrow \quad |\vec{r} \wedge \vec{v}| = const$$

وبالتالي |عزم سرعة A حول C| = |عزم سرعة B حول C|

$$\Rightarrow \quad |\vec{CA} \wedge \vec{v}_A| = |\vec{CB} \wedge \vec{v}_B|$$

$$|\vec{CA}| \cdot v_A \sin 90 = |\vec{CB}| \cdot v_B \sin 90$$

$$CA \cdot v_A = CB \cdot v_B \Rightarrow \boxed{\frac{v_A}{v_B} = \frac{CB}{CA}}$$

أي أن أعظم سرعة للكوكب تكون في النقطة الأقرب للشمس.

2

$$|\vec{CM} \wedge \vec{v}_M| = |\vec{CB} \wedge \vec{v}_B|$$

$$|\vec{CM}| \cdot v_M \sin 60° = |\vec{CB}| \cdot v_B \sin 90$$

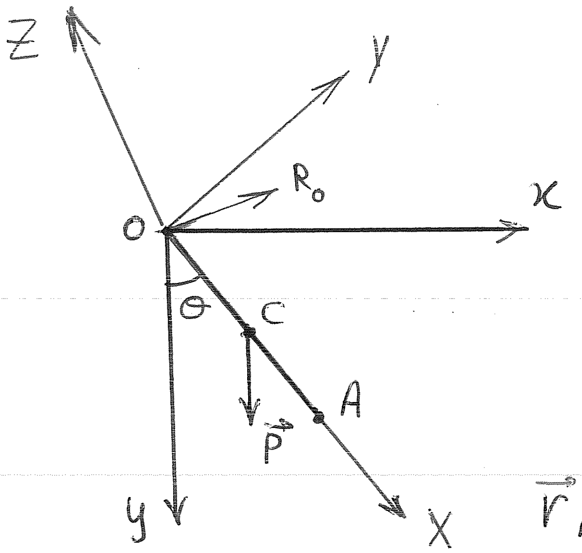
$$v_M \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CB}{CM} v_B \Rightarrow \boxed{v_M = \sqrt{3}\, v_B}$$

تمرين 1

OA قضيب متجانس طوله l ووزنه $\vec{P}$ متمفصل من رأسه في O بمفصل ثابت بحيث يتحرك في المستوي الشاقولي (OXY) والمطلوب:

1- أوجد المعادلة التفاضلية للحركة ثم أوجد سرعته وتسارعه الزاويين علماً أنه ترك بدون سرعة ابتدائية عندما كان أفقياً $(t=0,\ \theta=\frac{\pi}{2},\ \dot{\theta}=0)$

2- أوجد مركبات رد الفعل في O على جملة متحركة (مع القضيب OA) ثم على المحاور الثابتة وأوجد المحل الهندسي لذاية رد الفعل في المستويين الثابت والمتحرك.



الحل:

1. وسطاء المسألة θ (الزاوية)

2. القوى المؤثرة هي $\vec{P}$ ورد الفعل $\vec{R}$.

بتطبيق نظرية العزم الحركي :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge m\vec{v}) = \vec{r}\wedge\vec{F} \qquad (*)$$

$$\vec{r}\wedge\vec{F} = \vec{r}\wedge\vec{P} + \vec{r}\wedge\vec{R} \quad ; \quad \vec{r} = \vec{OC}$$

بما أن $\vec{R}$ يمر من O $\Leftarrow$ $\vec{r}\wedge\vec{R} = 0$

$$\vec{r}\wedge\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ \frac{\ell}{2}\sin\theta & \frac{\ell}{2}\cos\theta & 0 \\ 0 & P & 0 \end{vmatrix} = \frac{\ell}{2}P\sin\theta\,\vec{K}$$

عزم كمية حركة جسم يدور حول O :

$$\vec{r}\wedge m\vec{v} = -I_0\dot{\theta}\vec{K} \qquad (\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{OA}),\ \vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{K}$$

حيث $I_0 = \frac{M\ell^2}{3}$ عزم عطالة قضيب متجانس حول أحد أطرافه ولكن O و M كتلة OA

$$\Rightarrow \quad \vec{r}\wedge m\vec{v} = -\frac{M\ell^2}{3}\dot{\theta}\vec{K}$$

$$= -\frac{P}{3g}\ell^2\dot{\theta}\vec{K}$$

بالتعويض في $(*)$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{P}{3g}\ell^2\dot{\theta}\right) = \frac{\ell}{2}P\sin\theta$$

$$-\frac{P}{3g}\ell^2\ddot{\theta} = \frac{P\ell}{2}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\sin\theta = 0}$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة وتعطي التسارع الزاوي (المشتق الثاني لـ θ)

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2\ell}\sin\theta} \qquad (1)$$

السرعة الزاوية هي تكامل العلاقة $\ddot{\theta}$ مرة واحدة

للتكامل : نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $d\theta$:

$$d\theta\cdot\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{3g}{2\ell}\sin\theta\,d\theta$$

$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \frac{-3g}{2\ell}\sin\theta\,d\theta$$

$$\dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{+3g}{2l} \sin\theta\, d\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{+3g}{l} \cos\theta + C$$

من شرط البدء في اللحظة : $t=0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta}=0 \Rightarrow C=0$

وبالتالي السرعة الزاوية $\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l}\cos\theta}$ (2)

(2) من القانون الأساسي في التحريك (مطبق على مركز الكتل)

$$m\vec{\gamma}(C) = \vec{F}$$

$$\frac{P}{g}\vec{\gamma}(C) = \vec{P} + \vec{R}$$

بالإسقاط على المحاور المتحركة $oxyz$

$$\frac{P}{g} x'' = P\cos\theta + R_x$$

$$\frac{P}{g} y'' = -P\sin\theta + R_y$$

مركز الكتل C يرسم قوس من دائرة نصف قطرها $\frac{l}{2}$ فيكون x منطبق على ناظم المسار (الموجه نحو تقوس المسار) و y منطبق على المماس للمسار إذاً x'' التسارع الناظمي و y'' التسارع المماسي .

$$x'' = \gamma_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{2}{l}\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{l}{2}\dot{\theta}^2$$

$$y'' = \gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{l}{2}\ddot{\theta}$$

نعوض x'' و y'' في العلاقات السابقة :

$$\frac{P}{g}\frac{l}{2}\dot{\theta}^2 = P\cos\theta + R_x \qquad (3)$$

$$\frac{P}{g}\frac{l}{2}\ddot{\theta} = -P\sin\theta + R_y \qquad (4)$$

نعوض كل من $\ddot{\theta}$ و $\dot{\theta}^2$ بما يساويها من العلاقات (1) و (2) في العلاقات (3) و (4) ثم نحسب R_x و R_y

للحصول على مسار زاوية $\vec{R}$ في الحبل المتحركة نحذف الوسيط θ من (3) و (4) بعد أن نعوض $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ بما يساويها من العلاقات (1) و (2).

لنحسب الآن مركبات $\vec{R}$ في المحاور الثابتة :

بالإسقاط للقانون الأساسي للتحريك لمركز الكتل (C) على المحاور الثابتة :

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = R_x \qquad (5)$$

$$\frac{P}{g}\ddot{y} = P + R_y \qquad (6)$$

لدينا :

$$x(C) = \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$y(C) = \frac{l}{2}\cos\theta$$

بالاشتقاق مرتين :

$$\ddot{x}(C) = \left(\frac{l}{2}\cos\theta \cdot \dot{\theta}\right)'$$

$$= -\frac{l}{2}\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{l}{2}\cos\theta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\ddot{y}(C) = \left(-\frac{l}{2}\sin\theta \cdot \dot{\theta}\right)'$$

$$= -\frac{l}{2}\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 - \frac{l}{2}\sin\theta \cdot \ddot{\theta}$$

ثم نعوض $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ بما يساويه من العلاقات (1) و (2) في $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ ثم نعوض في العلاقات (5) و (6) ونحسب R_x و R_y .

ولإيجاد المحل الهندسي لزاوية $\vec{R}$ بالنسبة للمحاور الثابتة نحذف الزاوية θ من R_x و R_y .

د. هلال عمر