كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك ١

المحاضرة : الثامنة /نظري/

② المبادئ الأساسية في التحريك :

المبدأ الأول (مبدأ العطالة) :

تتحرك كل نقطة معزولة ($\vec{F}=0$) بحركة مستقيمة منتظمة أو تبقى ساكنة إذا كانت ساكنة .

• تدعى هذه الحركة بالحركة العطالية أي أن النقطة المادية المعزولة إما أن تكون ساكنة أو تتحرك حركة مستقيمة منتظمة.
ويسمى هذا المبدأ أيضاً بمبدأ العطالة الذاتي .

المبدأ الثاني (القانون الأساسي في التحريك) :

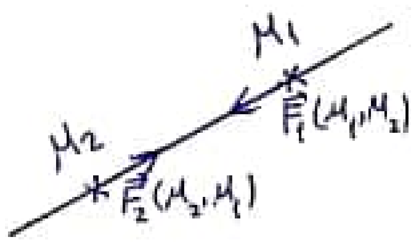
إذا تحركت النقطة المادية M تحت تأثير القوة $\vec{F}$ وبسرعة v فإن القانون الأساسي في التحريك يعبر عنه بالعلاقة :

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}$$

ويمكن كتابة القانون الأساسي بالتحريك بالشكل التالي :

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}$$

المبدأ الثالث (مبدأ الفعل ورد الفعل) :



إذا أثرت النقطة M_2 على النقطة M_1 بقوة $\vec{F}_1$
فإن النقطة M_2 تؤثر في النقطة M_1 بقوة $\vec{F}_2$
بحيث : $\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$

وهذه العبارة تعني أيضاً :

إذا أثرت نقطة مادية M_1 في نقطة مادية أخرى M_2 بقوة فعل معينة فإن النقطة M_2 تؤثر في النقطة M_1 بقوة رد فعل تساوي وتعاكس القوة الأولى و وإن هاتين القوتان محمولتان على المستقيم الواصل بين النقطتين .

ملاحظة هامة :

ينتج عن المبدأ الأساسي في التحريك :

- إذا كانت النقطة المادية في حالة سكون ثابت $\vec{v}=0 \Leftarrow \vec{F}=\vec{0}$

- ولكن إذا كانت $\vec{F}=0$ فليس بالضرورة أن تكون النقطة في حالة سكون (أي $\vec{v}=0$ في كل لحظة) لأنه:

$\vec{F}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{q}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{q}=m\vec{v}=c$ والنقطة تتحرك حركة مستقيمة منتظمة (مبدأ العطالة) إذن هي غير ساكنة (في كل لحظة $\vec{v}\neq 0$).

القانون الأساسي في التحريك في الاحداثيات الديكارتية:

لتكن $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ محصلة القوى المؤثرة على النقطة المادية و $\vec{\gamma}(x'', y'', z'')$ تسارعها فيكون:

$$F_x = m x'' \quad , \quad F_y = m y'' \quad , \quad F_z = m z''$$

القانون الأساسي في التحريك في الاحداثيات المستوية:

$$F_x = m x'' \quad , \quad F_y = m y''$$

القانون الأساسي في التحريك على المستقيم (المحور ox):

$$F_x = m x''$$

القانون الأساسي في التحريك في الاحداثيات القطبية:

$$m\gamma_r = F_r \Rightarrow m(r'' - r\theta'^2) = F_r$$
$$m\gamma_\theta = F_\theta \Rightarrow m(2r'\theta' + r\theta'') = F_\theta$$

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح فإن القانون الأساسي في التحريك:

$$-mc^2u^2(u''+u) = F_r$$

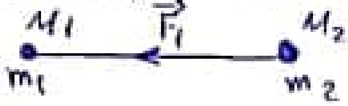
القانون الأساسي في التحريك في الاحداثيات الذاتية:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau$$
$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n$$

③ قانون الجذب العام :

نص قانون الجذب العام :

النقطة المادية M_1 ذات الكتلة m_1 تؤثر في النقطة المادية M_2 ذات الكتلة m_2 بقوة $\vec{F}$.



تتمتع بالخواص التالية :

1- حاملها ينطبق على المستقيم M_1M_2

2- اتجاهها من M_2 نحو M_1 (قوة جاذبية) .

3- شدتها تتناسب طرداً مع جداء كتلتي النقطتين، وعكساً مع مربع المسافة M_1M_2 :

$$\|\vec{F_1}\| = K\frac{m_1\cdot m_2}{(M_1M_2)^2}$$

يدعى K ثابت الجاذبية وله القيمة $K=6.672\times10^{11}$

وحسب مبدأ الفعل ورد الفعل فإن M_2 تؤثر في M_1 بقوة $\vec{F_2}$

$$\vec{F_2} = -\vec{F_1}$$

- بحالة خاصة إن قوة جذب الكرة الأرضية لنقطة M كتلتها m توجد على بعد r من مركز الكرة هي :

$$\vec{F} = \frac{-GMm}{r^2}\vec{e_r} = \frac{-GMm\cdot\vec{r}}{r^3}$$

حيث M كتلة الكرة الأرضية .

بتطبيق قانون التحريك الأساسي يمكن حساب تسارع الجاذبية في النقطة M :

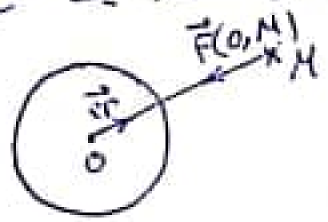
$$m\vec{\gamma} = \frac{-GMm}{r^2}\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{-GM}{r^2}\vec{e_r}$$

يمكن حساب ثابت الجذب G وذلك بملاحظة أنه عندما تكون النقطة M على سطح الأرض فإن تسارعها $\vec{\gamma}$ هو تسارع الجاذبية الأرضية ذو القيمة g أما بعدها عن مركز الكرة الأرضية رمزه R نصف قطر الأرض :

$$-g = \frac{-GM}{R^2} \Rightarrow G = \frac{gR^2}{M}$$

فالنقطة M الموجودة على مسافة قدرها r من مركز الكرة الأرضية تخضع لقوة جذب الأرض لها $\vec{F}(O,M)$:



$$\vec{F}(O,M) = \frac{-g R^2 m}{r^2} \vec{er}$$

المسائل الأساسية في التحريك :

تنحصر المسائل الأساسية في التحريك بمسألتين :

المسألة الأولى :

إذا علمت كتلة النقطة المادية m ومعادلات حركتها

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

فإنه يطلب إيجاد القوة المؤثرة (محصلة القوى المؤثرة) في هذه النقطة :

هذا النوع من المسائل سهل الحل :

فإذا كانت القوة المؤثرة (محصلة القوى) $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ فيكون

$$F_x = m\ddot{x} \quad , \quad F_y = m\ddot{y} \quad , \quad F_z = m\ddot{z}$$

فيكون :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

واتجاهاتها (جيوب تمام التوجيه) :

$$\cos(\vec{F}, \vec{i}) = \frac{F_x}{F} \quad , \quad \cos(\vec{F}, \vec{j}) = \frac{F_y}{F} \quad , \quad \cos(\vec{F}, \vec{k}) = \frac{F_z}{F}$$

المسألة الثانية :

إذا علمت كتلة النقطة المادية والقوى المؤثرة ونعلم كذلك وضعها وسرعتها لحظة البدء ، يُطلب تعيين معادلات حركة هذه النقطة .

هذه المسألة أكثر تعقيداً من المسألة الأولى وتعتبر المسألة الأكثر أهمية في علم التحريك .

في هذه الحالة ننطلق من المعادلة :

$$m\vec{\gamma} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} m x'' = F_x \\ m y'' = F_y \\ m z'' = F_z \end{cases}$$

تكامل مرتين نحصل على ستة ثوابت تكامل بشكل عام يتم تحديدها من شروط البدء المعطاة :

$$t=0 \begin{cases} x = x_0 \ , \ y = y_0 \ , \ z = z_0 \\ x' = x'_0 \ , \ y' = y'_0 \ , \ z' = z'_0 \end{cases}$$

تمرين :

M نقطة مادية كتلتها m تتحرك وفق المعادلتين :

$$x = R\cos\omega t$$
$$y = R\sin\omega t \qquad ; \qquad R, \omega \text{ ثابتان}$$

عين القوة المؤثرة في النقطة M والمسار .

الحل :

بالتخلص من t من معادلتي الحركة :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

المسار دائرة نصف قطرها R .

لنوجد مساقط شعاع التسارع على المحاور الاحداثية :

$$x'' = -\omega^2 R\cos\omega t \qquad , \qquad y'' = -\omega^2 R\sin\omega t$$

وبالتالي فإن مساقط القوى على المحاور الاحداثية هي :

$$F_x = m x'' = -m\omega^2 R\cos\omega t = -m\omega^2 x$$
$$F_y = m y'' = -m\omega^2 R\sin\omega t = -m\omega^2 y$$

أما طول القوة (مشدتها) واتجاهها :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 R$$
$$\cos(\vec{F}, \vec{i}) = \frac{F_x}{F} = -\cos\omega t = -\frac{x}{R}$$
$$\cos(\vec{F}, \vec{j}) = \frac{F_y}{F} = -\sin\omega t = -\frac{y}{R}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = -m\omega^2 x\vec{i} - m\omega^2 y\vec{j} = -m\omega^2(x\vec{i} + y\vec{j}) = -m\omega^2\vec{r}$$

ملاحظة :

$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$ يتبين لنا أن النقطة M تخضع لقوة جذب .

تمرين :

قذفت كرة صغيرة شاقولياً إلى الأعلى بسرعة ابتدائية $v_0 = 196\,ms^{-1}$ فإذا علمت أنه في أثناء حركتها تخضع لتسارع الثقالة الأرضية $g = 9.8\,ms^{-1}$ فإن المحور oz شاقولي للأسفل .

1) أوجد الزمن اللازم لكي تصل النقطة لأعلى نقطة في مسارها وأوجد راسم هذه النقطة .

2) عين الزمن اللازم لتصل النقطة إلى النقطة التي راسمها $z_1 = 98$ وما قيمة السرعة في النقطة z_1 ، $v(z_1)$.

الحل :

1)

$$m\vec{\gamma} = m\vec{g}$$

$$\gamma = g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g$$

$$v = gt + c_1$$

في اللحظة $t=0$ كان $v_0 = 196$ وجهتها للأعلى :

$$\boxed{v = gt - 196} \quad (1)$$

بالتكامل :

$$z = \frac{1}{2} g t^2 - 196t + z_0$$

في اللحظة $t=0$ كانت $z_0 = 0$ ⇐ $\boxed{z = \frac{9.8}{2} t^2 - 196t}$ (2)

في أعلى نقطة على مسارها يكون $v=0$ ⇐

$$(1) \Longrightarrow gt - 196 = 0 \Rightarrow t = \frac{196}{9,8} = 20s$$

نعوض الزمن في (2)

$$z = \frac{9,8}{2}(20)^2 - 196(20) = -196\ m$$

2)

$$z = \frac{9,8}{2} t^2 - 196t$$

$$98 = \frac{9,8}{2} t^2 - 196t \quad \Longleftarrow \quad z_1 = 98$$

$$\Delta = (196)^2 - 4\left(\frac{9,8}{2}\right)(-98) = 40336,8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 200,8$$

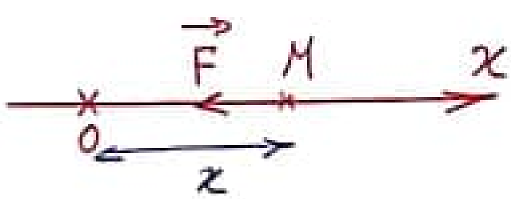
$$t_1 = \frac{196 - 200,8}{9,8} = -0,49 \quad \text{مرفوض}$$

$$t_2 = \frac{196 + 200,8}{9,8} = 40,49 \quad \text{مقبول}$$

$$v_1 = v(z_1) = 9,8(40,49) - 196 = 200,8\ ms^{-1} \Longleftarrow (1)\ \text{نعوض في}$$

الدراسة الحركية للحركة الاهتزازية التوافقية :

لنفرض أن هنالك نقطة مادية M كتلتها m تتحرك على المستقيم x. ولنأخذ نقطة O على هذا المستقيم كمبدأ للقياس. لنفرض أن النقطة M تخضع لتأثير قوة جاذبة $\vec{F}$ من المركز :



$$\vec{F} = -c\vec{x}$$

حيث c ثابت موجب.

المعادلة التفاضلية لحركة النقطة M المستقيمة :

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}$$

بالإسقاط :

$$m x'' = -cx$$

$$\boxed{x'' + K^2 x = 0} \quad \text{و} \quad K^2 = \frac{c}{m}$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة الاهتزازية التوافقية.

لمكاملة هذه المعادلة نأخذ المعادلة المميزة :

$$\lambda^2 + K^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = iK \ , \ \lambda_2 = -iK$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x = C_1 \cos Kt + C_2 \sin Kt \quad (*)$$

لنوجد الثوابت C_1, C_2 :

$$x' = -C_1 K \sin Kt + C_2 K \cos Kt$$

لنأخذ شروط البدء كما يلي : (في اللحظة $t=0$ كانت $x = x_0$, $x' = x'_0$)

$$\Rightarrow C_2 = \frac{x'_0}{K} \ , \ C_2 = x_0$$

نعوض قيم الثوابت :

$$x = x_0 \cos Kt + \frac{x'_0}{K} \sin Kt$$

يمكن إعطاء المعادلة (الحل) * شكلاً آخر وذلك بإدخال ثابتين جديدين a, α بدلاً من C_1, C_2 حيث

$$C_1 = a \sin\alpha \ , \ C_2 = a \cos\alpha$$

$$x = a \sin\alpha \cos Kt + a \cos\alpha \sin Kt$$

$$\boxed{x = a\sin(Kt+\alpha)}$$

وهي عبارة عن حركة اهتزازية مستقيمة وتوافقية .

لتحديد الثوابت a و α نشتق المعادلة الأخيرة .

$$\dot{x} = aK\cos(Kt+\alpha)$$

باستخدام شروط البدء

$$x_0 = a\sin\alpha \quad , \quad \dot{x}_0 = aK\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{K}\right)^2} \\ tg\alpha = \dfrac{Kx_0}{\dot{x}_0} \end{cases}$$

ودور الحركة :

$$T = \frac{2\pi}{K} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \quad ; \quad K^2 = \frac{c}{m}$$

$$\boxed{x = a\sin(Kt+\alpha)}$$

وهي عبارة عن حركة اهتزازية مستقيمة وتوافقية.

لتحديد الثوابت a و α نشتق المعادلة الأخيرة

$$\dot{x} = aK\cos(Kt+\alpha)$$

باستخدام شروط البدء

$$x_0 = a\sin\alpha \quad , \quad \dot{x}_0 = aK\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{K}\right)^2} \\ tg\alpha = \frac{K x_0}{\dot{x}_0} \end{cases}$$

ودور الحركة:

$$T = \frac{2\pi}{K} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \quad ; \quad K^2 = \frac{c}{m}$$

<u>سؤال</u>: برهن أن الجاذبية الأرضية تبلغ قيمتها العظمى على سطح الأرض وتصغر في حال وصولنا إلى قمة جبل أو داخل بئر.

الحركة الاهتزازية المتخامدة :

في الفقرة السابقة لم نأخذ بعين الاعتبار قوة مقاومة الوسط كالاحتكاك ومقاومة الهواء وغيرها من القوى .

وهي قوة تتجه دوماً بعكس حركة النقطة . وعندما تكون سرعة النقطة المادية صغيرة تكون مقاومة الوسط كقوة متعلقة

في هذه الفقرة سنأخذ بعين الاعتبار قوة مقاومة الوسط

بالسرعة في الدرجة الأولى أي أن $\vec{R} = -\mu \vec{x}'$

بتطبيق القانون الأساسي في التحريك $m\vec{\gamma} = \vec{F} + \vec{R}$

و $\vec{F} = -C\vec{x}$ ، $\vec{R} = -\mu \vec{x}'$

بالإسقاط : $m x'' = -Cx - \mu x'$

$$\boxed{x'' + 2b x' + k^2 x = 0} \quad (1)$$

حيث : $2b = \frac{\mu}{m}$ ، $K^2 = \frac{C}{m}$

(1) هي المعادلة التفاضلية لحركة نقطة مادية خاضعة لقوة جاذبية $\vec{F}$ ولمقاومة الوسط $\vec{R}$

لمكاملتها نأخذ المعادلة المميزة : $\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0$

$$\Delta = 4b^2 - 4k^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{b^2 - k^2}$$

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - k^2}$$

$\boxed{A}$ إذا كان $\Delta > 0$ $(b > k)$ $\Leftarrow$ $\lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - k^2}$ ،

الحل العام : $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

$$x = e^{-bt}\left(C_1 e^{t\sqrt{b^2-k^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{b^2-k^2}}\right) \quad (*)$$

إذا افترضنا $n = \sqrt{b^2 - k^2}$

$$x = e^{-bt}\left(C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt}\right)$$

نعلم أن $e^{nt} = ch(nt) + sh(nt)$ و $e^{-nt} = ch(nt) - sh(nt)$

بالتعويض :

$$x = e^{-bt}\left[C_1[ch(nt) + sh(nt)] + C_2[ch(nt) - sh(nt)]\right]$$

$$= e^{-bt}\left[(C_1 + C_2)ch(nt) + (C_1 - C_2)sh(nt)\right]$$

$$\boxed{x = e^{-bt}\left(A\, ch(nt) + B\, sh(nt)\right)}$$

و $A = C_1 + C_2$ ، $B = C_1 - C_2$ ، $n = \sqrt{b^2 - k^2}$

أي أن الحركة تخامدية (تتخامد في الوسط المقاوم مع مرور الزمن).
(غير اهتزازية).

$\boxed{B}$ إذا كان $\Delta = 0$ $(b = k)$ $\Leftarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$ (جذر مكرر)

فيكون الحل العام للمعادلة (1)

$$\boxed{x = (C_1 + tC_2)\,e^{-bt}}$$

هي حركة تخامدية غير اهتزازية [لأن الحد e^{-bt} يتناقص بسرعة أشد من تزايد الزمن)

ملاحظة: غالباً عند وجود تابع أسي تكون الحركة جيبية متخامدة .

$\boxed{C}$ $\Delta < 0$ أي $b < K$

في هذه الحالة نفرض أن $K^2 - b^2 = K_1^2$ أي أن $b^2 - K^2 = -K_1^2 = i^2 K_1^2$

وبالتالي :

$$\sqrt{b^2 - K^2} = \pm i K_1 \Rightarrow \lambda_1 = -b + iK_1 \;,\; \lambda_2 = -b - iK_1$$

ويكون الحل العام من الشكل : $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

$$x = C_1 e^{(-b+iK_1)t} + C_2 e^{(-b-iK_1)t}$$

$$x = e^{-bt}\left(C_1 e^{iK_1 t} + C_2 e^{-iK_1 t} \right)$$

ونعلم أن :

$$e^{iK_1 t} = \cos(K_1 t) + i\sin(K_1 t) \;,\; e^{-iK_1 t} = \cos(K_1 t) - i\sin(K_1 t)$$

$$x = e^{-bt}\left(C_1[\cos(K_1 t) + i\sin(K_1 t)] + C_2[\cos(K_1 t) - i\sin(K_1 t)] \right)$$

$$= e^{-bt}\left[(C_1 + C_2)\cos(K_1 t) + i(C_1 - C_2)\sin(K_1 t) \right]$$

بفرض أن $A = C_1 + C_2$ و $B = i(C_1 - C_2)$ $\Leftarrow$

$$\boxed{x = e^{-bt}\left[A\cos(K_1 t) + B\sin(K_1 t) \right]}$$

وهذا يبين أن الحركة : اهتزازية متخامدة .

[اهتزازية لأنه تغير إشارته بشكل دوري عند تغير إشارة الجيب

والمضروب e^{-bt} يبين أن الحركة تتناقص مع مرور الزمن أي حركة متخامدة]

دورها :

$$T_1 = \frac{2\pi}{K_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{K^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{K\sqrt{1 - (\frac{b}{K})^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - (\frac{b}{K})^2}}$$

حيث $T = \frac{2\pi}{K}$ دور الحركة الاهتزازية البسيطة

$T_1 > T$ دور الاهتزازات المتخامدة أكبر من دور الاهتزازات التوافقية