كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك ١

المحاضرة : السابعة /نظري/

دستورا بينيه :

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح يمكن حساب السرعة والتسارع في الاحداثيات القطبية بدلالة r و θ (أي مستقلين عن الزمن t).

• لتحويل المشتقات بالنسبة للزاوية القطبية θ بدلاً من الزمن t، ندخل متحولاً جديداً معرفاً :

$$u = \frac{1}{r}$$

لدينا العلاقات :

سرعة النقطة في الاحداثيات القطبية (1): $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

شرط خضوع الحركة لقانون السطوح (2): $r^2\dot{\theta} = C$

العلاقة (2) تكتب بعد ادخال المتحول الجديد :

$$\dot{\theta} = Cu^2$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = Cu^2$$

وبالتالي بالتعويض في $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot Cu^2 = -C\frac{du}{d\theta} = -Cu'_\theta$$

المعادلة المتجهية للسرعة :

$$\vec{v} = C(-u'_\theta\,\vec{e_r} + u\,\vec{e_\theta})$$

بالتربيع :

$$\boxed{v^2 = C^2(u'^2_\theta + u^2)}$$

د. هالا محمو

وهو دستور بينيه الأول ويعبر عن سرعة النقطة في الاحداثيات القطبية عندما تكون الحركة خاضعة لقانون السطوح حيث تكون المشتقات مأخوذة بالنسبة لـ θ وليس بالنسبة للزمن t.

لنوجد التسارع :

في الحركة الخاضعة لقانون السطوح يكون التسارع مركزياً أي محمولاً على نصف القطر المتجه $\vec{r}$:

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e_r}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = (-c\,u''_\theta)(c\,u^2) = -c^2u^2u''_\theta$$

$$\vec{\gamma} = \left[-c^2u^2u''_\theta - \frac{1}{u}(c^2u^4)\right]\vec{e_r} = -c^2u^2(u''_\theta+u)\,\vec{e_r}$$

وبالتالي فإن التسارع يعطى بالعلاقة :

$$\boxed{\vec{\gamma} = -c^2u^2(u''_\theta+u)\,\vec{e_r}}$$

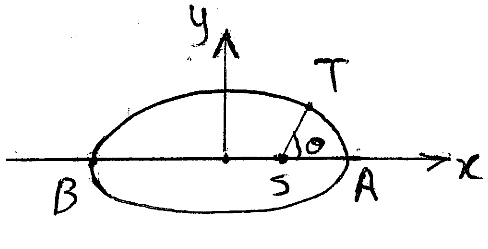
وهو دستور بينيه الثاني.

تمرين :

نقطة مادية خاضعة لقانون السطوح حول o . يعطى نصف القطر المتجه وفق العلاقة :

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$

أوجد السرعة العددية لهذه الحركة والسرعة في أقرب نقطة وأبعد نقطة عن الشمس.



الحل :

$$u = \frac{1+e\cos\theta}{p}$$

$e = \frac{c}{a} < 1$ التباعد المركزي

$P = \frac{b^2}{a}$ الوسيط

$c^2 = a^2 - b^2$

$$u'_\theta = \frac{-e\sin\theta}{p}$$

قانون بينيه الأول :

$$v^2 = c^2(u'^2_\theta + u^2)$$

$$v^2 = c^2\left[\frac{e^2\sin^2\theta}{p^2} + \frac{1}{p^2}(1+e\cos\theta)^2\right]$$

$$= \frac{c^2}{p^2}\left[e^2\sin^2\theta + 1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta\right]$$

• عندما $\theta=0$ فإن السرعة العددية:

$$\theta=0 \Longrightarrow v_A^2=\frac{c^2}{p^2}(1+e)^2$$

لدينا:

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=a-\frac{c^2}{a}=a\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=a(1-e^2)$$

$$v_A^2=\frac{c^2(1+e)^2}{a^2(1-e^2)^2}=\frac{c^2(1+e)^2}{a^2(1-e)^2(1+e)^2}=\frac{c^2}{a^2(1-e)^2}$$

وبالتالي سرعة أقرب نقطة عن الشمس:

$$\boxed{v_A=\frac{c}{a(1-e)}}$$

• عندما $\theta=\pi \Longleftarrow$

$$v_B^2=\frac{c^2(1-e)^2}{a^2(1-e)^2(1+e)^2}=\frac{c^2}{a^2(1+e)^2}$$

سرعة أبعد نقطة عن الشمس:

$$\boxed{v_B=\frac{c}{a(1+e)}}$$

$$\boxed{\frac{v_A}{v_B}=\frac{1+e}{1-e}}$$

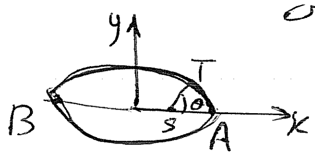
سؤال:

إذا كانت سرعة الأرض في النقطتين A و B:

$$v_A=\frac{c}{a(1-e)} \quad , \quad v_B=\frac{c}{a(1+e)}$$

برهن أن الأرض تتحرك بسرعة أكبر إذا اقتربت من الشمس

$$v_A>v_B$$



ثم أوجد التسارع وبرهن أنه يتناسب عكساً مع مربع البعد.

الحل:

في القطع الناقص يكون التباعد المركزي $e<1$ (في حالتنا $e=\frac{1}{2}$)

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{1+e}{1-e}=3>1 \Longrightarrow v_A>v_B$$

أي أن السرعة في A (النقطة الأقرب إلى الشمس) أكبر من السرعة في B
أي أن السرعة تكون أكبر كلما اقتربنا من الشمس.
لإيجاد التسارع:

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \Rightarrow u = \frac{1+e\cos\theta}{p}$$

$$u'_\theta = \frac{-e\sin\theta}{p} \quad , \quad u''_\theta = \frac{-e\cos\theta}{p}$$

دستور بينيه الثاني:

$$\vec{\gamma} = -c^2u^2(u''_\theta + u)\,\vec{e_r}$$

$$\vec{\gamma} = -\frac{c^2}{p^2}(1+e\cos\theta)^2\left[\frac{-e\cos\theta}{p} + \frac{1+e\cos\theta}{p}\right]\vec{e_r}$$

$$\vec{\gamma} = -c^2\frac{(1+e\cos\theta)^2}{p^2}\cdot\frac{1}{p}\,\vec{e_r} = -\frac{c^2}{pr^2}\,\vec{e_r}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = -\frac{c^2}{pr^2}\,\vec{e_r}}$$

نلاحظ أن التسارع مركزي، وهو يتناسب عكساً مع مربع البعد r.

تمرين: يتحرك جسم في مجال مركزي على المسار $r=\theta$ والمطلوب:
أوجد سرعة وتسارع هذا الجسم ثم أوجد السرعة السطحية لهذا الجسم.
الحل: مجال مركزي ← الحركة خاضعة لقانون السطوح

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow u = \frac{1}{\theta} \quad , \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{\theta^2} = -u^2$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -2u\cdot u' = -2\frac{1}{\theta}\left(-\frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{2}{\theta^3} = 2u^3$$

دستور بينيه الأول:

$$v^2 = c^2(u'^2 + u^2)$$

$$v^2 = c^2(u^4 + u^2) \Rightarrow v = c\sqrt{u^4+u^2} = cu\sqrt{u^2+1}$$

دستور بينيه الثاني:

$$\vec{\gamma} = -c^2u^2[u+u'']\,\vec{e_r}$$

$$\vec{\gamma} = -c^2u^2[u+2u^3]\,\vec{e_r} = -c^2u^3[1+2u^2]\,\vec{e_r}$$

حيث c ثابت السطوح:

$$c = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

$$C = \frac{1}{2} r^2 \dot\theta$$

نعوض في علاقة السرعة والتسارع .

$$v = C u \sqrt{u^2+1} = \frac{1}{2} r^2 \dot\theta \cdot \frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{r^2}+1} = \frac{1}{2} r \dot\theta \sqrt{\frac{1+r^2}{r^2}} = \frac{1}{2}\dot\theta (1+r^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{4} r^4 \dot\theta^2 \cdot \frac{1}{r^3}\left[1+\frac{2}{r^2}\right]\vec{e_r} = -\frac{1}{4}\frac{1}{r}\dot\theta^2\left[r^2+2\right]\vec{e_r}$$

السرعة السطحية :

$$W = C = \frac{1}{2} r^2 \dot\theta$$

تحريك النقطة المادية

- رأينا في الفصل السابق أن دراسة حركة نقطة مادية تسمح بوصف الحركة دون الاهتمام بمسبباتها .
- أما التحريك فهو الفرع الذي يهتم بدراسة حركة النقطة المادية تحت تأثير القوى أي يسمح بربط الحركة بمسبباتها (التحريك = الحركة + القوى).
- علم التحريك يتميز عن علم الحركة باستخدامه مقدارين جديدين هما القوة والكتلة .
إذن فالمقادير المستخدمة هي الزمن والطول والكتلة والقوة .
- إن العلاقة التي تربط المقادير الأربعة هي القانون الأساسي للتحريك و الذي يشكل مبدأ الميكانيك النيوتوني .

القوى : وهي مسببات الحركة ويوجد أنواع كثيرة من القوى مثل :

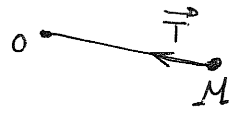
قوة الثقل :

لتكن M نقطة مادية كتلتها m وثقلها $\vec{P}$ فيكون $\vec{P} = m\vec{g}$

$\vec{P}$ ثقل النقطة (نيوتن N) و m الكتلة (Kg) و $\vec{g} = 9.81\,\vec{e_z}$ تسارع الجاذبية الأرضية $(m.s^{-2})$.

قوة الشد :

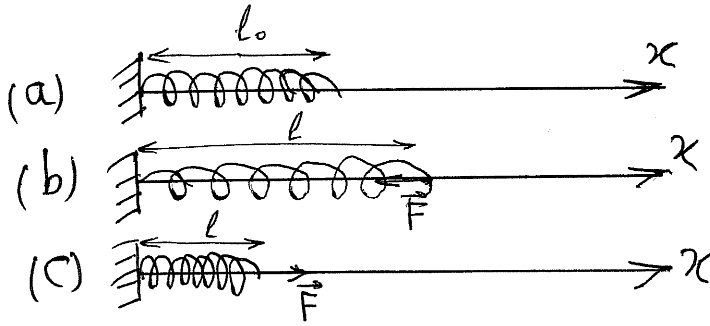
M نقطة مادية كتلتها m مثبتة بطرف خيط مرن ذو كتلة مهملة وطول ثابت l



$$\vec{T} = T\vec{u}$$

حيث $\vec{u}$ متجه واحدة موجه من M إلى O .

قوة المرونة :



ليكن لدينا نابض أفقي محمول على المحور $(O, \vec{e}_x)$ ذو كتلة مهملة وطوله l_0 في حالة الراحة وعامل مرونته $k\,(N.m^{-1})$ الشكل (a)

- إذا شددنا النابض (الحالة (b)) تنشأ قوة مرونة تسعى لإعادة النابض إلى وضع راحته هذه القوة متناسبة مع $(l-l_0)$ و k :

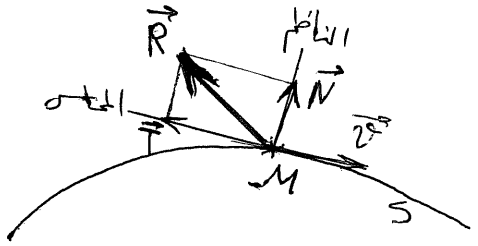
$$\vec{F} = k(l-l_0)(-\vec{e}_x) = -k(l-l_0)\vec{e}_x$$

- إذا ضغطنا النابض (الحالة (c)) تنشأ قوة مرونة تسعى لإعادة النابض إلى وضع راحته هذه القوة متناسبة مع (l_0-l) ومع k :

$$\vec{F} = k(l_0-l)\vec{e}_x = -k(l-l_0)\vec{e}_x$$

قوة المرونة $\vec{F}$ تقدر بـ (N نيوتن) وعامل المرونة k بـ $(N.m^{-1})$ والتمدد $(l-l_0)$ بـ (m).

قوة الاحتكاك :



عندما يحصل تماس بين نقطة مادية M كتلتها m وجسم صلب S، فالصلب يؤثر على النقطة M بقوة $\vec{R}$ تسمى رد الفعل والتي لها مركبتان: مركبة ناظمية $\vec{N}$ (رد الفعل الناظمي) ومركبة مماسية (رد الفعل المماسي) $\vec{T}$ وتسمى قوة الاحتكاك ($\vec{T}$ يكون عكس السرعة $\vec{v}$).

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

- إذا كانت M تنزلق على السطح S :

$$\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$$

حيث f هو عامل الاحتكاك.

- إذا كانت M لا تنزلق على S:

$$\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$$

- في حال غياب الاحتكاك ($f=0$) فيكون رد فعل S ناظمي أي أن:

$$\vec{R} = \vec{N}$$

(1) العناصر (الكميات) التحريكية للنقطة المادية :

[1] كمية الحركة للنقطة المادية :

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك بسرعة $\vec{v}$، إن كمية حركة النقطة في اللحظة t هي المقدار المتجهي :

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

في الاحداثيات الديكارتية :

$$\vec{q} = \begin{cases} q_x = m\dot{x} \\ q_y = m\dot{y} \\ q_z = m\dot{z} \end{cases}$$

$$|\vec{q}| = q = m\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

في الاحداثيات القطبية :

$$\vec{q} = \begin{cases} q_r = m\dot{r} \\ q_\theta = mr\dot{\theta} \end{cases}$$

في الاحداثيات الذاتية :

$$\vec{q} = \vec{q}_\tau = mv\vec{\tau}$$

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{\gamma} = \vec{F}$$

مشتق متجه كمية الحركة يساوي القوة $\vec{F}$ ، وهنا هو المبدأ الأساسي في الفيزياء.

- إذا كانت مساقط القوة $= 0 \Leftarrow \vec{F} = 0 \Leftarrow q = q_0$ وهي مصونية كمية الحركة

وتستخدم هذه النظرية في مسائل الصدم حيث: كمية الحركة قبل الصدم = كمية الحركة بعد الصدم

[2] العزم الحركي (عزم كمية الحركة) للنقطة المادية :

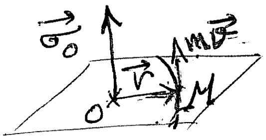
لتكن $oxyz$ جملة محاور احداثية.

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك في اللحظة t بسرعة $\vec{v}$

يدعى بالتعريف عزم كمية الحركة $\vec{q}$ بالنسبة للنقطة o بالعزم الحركي للنقطة M بالنسبة إلى النقطة o ، نكتب :

$$\vec{\sigma_0} = \vec{OM} \wedge \vec{q} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

العزم الحركي $\vec{\sigma_0}$ يعامد المستوى المعين بالمتجهين $\vec{r}$, $\vec{v}$.



العزم الحركي في الاحداثيات الديكارتية :

$$\vec{\sigma_0} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} =$$

$$\vec{\sigma_0} = \underbrace{m(y\dot{z} - \dot{y}z)}_{\sigma_{0x}}\vec{e_x} + \underbrace{m(\dot{x}z - x\dot{z})}_{\sigma_{0y}}\vec{e_y} + \underbrace{m(x\dot{y} - \dot{x}y)}_{\sigma_{0z}}\vec{e_z}$$

في المستوى xoy :

$$\vec{\sigma_0} = m(x\dot{y} - \dot{x}y)\vec{e_z}$$

في الاحداثيات القطبية :

$$\vec{\sigma_0} = \begin{vmatrix} \vec{e_r} & \vec{e_\theta} & \vec{e_z} \\ r & 0 & 0 \\ m\dot{r} & mr\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = m r^2 \dot{\theta}\, \vec{e_z}$$

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح يكون العزم الحركي ثابت دوماً :

$$\boxed{\vec{\sigma_0} = \vec{C}}$$

مثال :

نقطة مادية تتحرك في المستوى وفق المعادلتين :

$$x = a_1 \cos\omega t$$
$$y = a_2 \sin\omega t$$

أوجد متجه كمية الحركة لهذه النقطة ثم أوجد كمية الحركة وماهو متجه العزم الحركي.
إذا كانت كتلة هذه النقطة $m = 1$.

الحل :

$$\vec{q} = m\vec{v} = \vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} \quad ; \quad m = 1$$

متجه كمية الحركة :

$$\vec{q} = -a_1 \omega \sin\omega t\, \vec{e_x} + a_2 \omega \cos\omega t\, \vec{e_y}$$

كمية الحركة :

$$q = |\vec{q}| = \sqrt{\omega^2 (a_1^2 \sin^2\omega t + a_2^2 \cos^2\omega t)}$$

العزم الحركي هو:

$$\vec{\sigma_0} = \vec{OM} \wedge \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ a_1 \cos\omega t & a_2 \sin\omega t & 0 \\ -a_1\omega \sin\omega t & a_2\omega \cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_2 \omega \cos^2\omega t + a_1 a_2 \omega \sin^2 \omega t)\vec{e_z} = a_1 a_2 \omega \vec{e_z}$$

$$\vec{\sigma_0} = \vec{C}$$

والحركة خاضعة لقانون السطوح حول O لأن متجه العزم الحركي ثابت.

$\boxed{3}$ الطاقة الحركية:

لنفرض M نقطة مادية كتلتها m تتحرك بسرعة $\vec{v}$.

تُعرف الطاقة الحركية للنقطة المادية بأنها نصف جداء كتلتها في مربع سرعتها:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

في الإحداثيات الديكارتية:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

في المستوي:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

على المحور ox:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

في الإحداثيات القطبية:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

في الإحداثيات الاسطوانية:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$