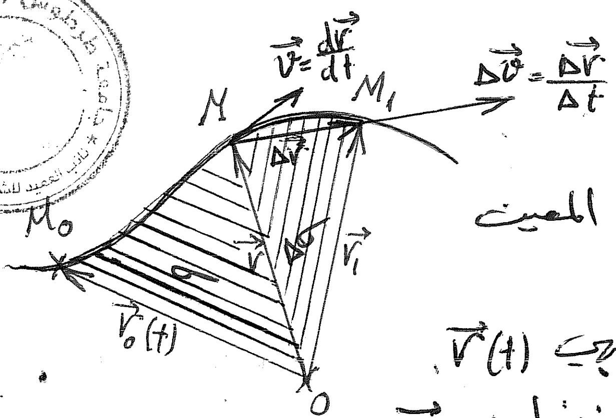
كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك ١

المحاضرة : السادسة /نظري/



الحركة الخاضعة لقانون السطوح

السرعة السطحية:

عندما تنتقل النقطة المادية من الموضع M_0 المعين بنصف القطر المتجه $\vec{r_0}(t)$ إلى الموضع M المعين بنصف القطر المتجه $\vec{r}(t)$، فإنه يرسم (تمسح) سطحاً مخروطياً نرمز له بـ $\vec{\sigma}$.

- لنفرض أن النقطة المتحركة كانت في اللحظة (t) في الموضع M المحدد بـ $\vec{r}(t)$ والسطح الموافق $\vec{\sigma}$
- لنفرض أن هذه النقطة في اللحظة $(t+\Delta t)$ وصلت إلى الموضع M_1 المعين بنصف القطر المتجه $\vec{r_1}(t+\Delta t)$ والسطح الموافق هو $\vec{\sigma_1}=\vec{\sigma}+\Delta\vec{\sigma}$
- عندئذٍ إذا كانت Δt صغيرة فإنه يمكن اعتبار تغير السطح $\Delta\sigma$ خلال الفترة Δt: كمية تقدر بالسطح المستوي OMM_1 أي كمية طوله نصف سطح متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين $\vec{r}$ ، $\Delta\vec{r}$ أي:

$$\Delta\vec{\sigma}=\frac{1}{2}(\vec{r}\wedge\Delta\vec{r})=S(O\hat{M}M_1)$$

نسمي النسبة $\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t}$ بالسرعة السطحية الوسطى:

إن نهاية النسبة $\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t}$ عندما $\Delta t\to 0$ تسمى بالسرعة السطحية للنقطة M بالنسبة للمركز O:

$$\vec{W}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t}=\frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\vec{r}\wedge\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right)=\frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\vec{r}\wedge\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{r}\wedge\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{r}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{1}{2}(\vec{r}\wedge\vec{v})$$

$$\boxed{\vec{W}=\frac{1}{2}(\vec{r}\wedge\vec{v})}$$

إن العلاقة $\vec{r}\wedge\vec{v}$ تدعى بعزم سرعة النقطة M بالنسبة للمركز O وبالتالي فإن السرعة السطحية لنقطة بالنسبة لمركز ما يساوي نصف عزم سرعة هذه النقطة بالنسبة لنفس المركز.

ملاحظة:

يتضح من العلاقة الأخيرة أن السرعة السطحية تتعلق بالمركز المختار، فمن أجل كل مركز تأخذ السرعة السطحية قيمة مقابلة.

إذاً عند إعطاء السرعة السطحية يلزم الإشارة إلى المركز الذي أخذت بالنسبة له.

بفرض أن المركز O في الشكل السابق هو مبدأ لجملة إحداثية ديكارتية.

فإن السرعة السطحية تعطى بالإحداثيات الديكارتية بالعلاقات :

$$\vec{W} = \frac{1}{2}(\vec{r}\wedge\vec{v}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{W} = \frac{1}{2}\left[(y\dot{z}-\dot{y}z)\vec{i}+(z\dot{x}-x\dot{z})\vec{j}+(x\dot{y}-\dot{x}y)\vec{k}\right]$$

وبالتالي فإن المساقط للسرعة السطحية على المحاور الاحداثية هي :

$$(1)\begin{cases} W_x = y\dot{z}-\dot{y}z \\ W_y = z\dot{x}-x\dot{z} \\ W_z = x\dot{y}-\dot{x}y \end{cases}$$

حالة خاصة :

إذا كانت حركة النقطة M تتم في مستو (الحركة المستوية) وليكن : oxy وبالتالي يكفي أن نضع في العلاقات السابقة $z=0$ وبالتالي :

السرعة السطحية في الاحداثيات الديكارتية (في الحركة المستوية) :

$$\vec{W} = W\vec{e_z} = \frac{1}{2}(\vec{r}\wedge\vec{v}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})$$

ملاحظة : نلاحظ من العلاقات (1) :

أن مسقط السرعة السطحية على كل محور من المحاور الاحداثية يساوي قيمة السرعة السطحية في المستوي الذي يعامد هذا المحور.

فمثلاً على oz : مسقط السرعة السطحية تساوي قيمة هذه السرعة في المستوي oxy .

السرعة السطحية في الاحداثيات القطبية :

$$\vec{W} = \frac{1}{2}(\vec{r}\wedge\vec{v}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e_r} & \vec{e_\theta} & \vec{e_z} \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}}$$

التسارع السطحي :

يدعى مشتق السرعة السطحية لنقطة ما بالنسبة للزمن بالتسارع السطحي (السرعة السطحية بالنسبة لمركز ما غير ثابتة بشكل عام)

انطلاقاً من العلاقة :

$$\vec{W} = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \vec{v})$$

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

لدينا : $\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} = 0$ ، و $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\gamma}$

وبالتالي التسارع السطحي :

$$\vec{W}' = \frac{d\vec{W}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \vec{\gamma})$$

أي أن نصف الجداء الخارجي لنصف القطر المتجهي $\vec{r}$ في التسارع اللحظي $\vec{\gamma}$ لتلك النقطة هو التسارع السطحي للنقطة بالنسبة لـ O.

التسارع السطحي في الاحداثيات الديكارتية :

بإسقاط العلاقة الأخيرة على جملة محاور احداثية متعامدة $Oxyz$:

$$\vec{W}' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(yz'' - y''z)\vec{i} + (x''z - xz'')\vec{j} + (xy'' - x''y)\vec{k}\right]$$

حيث مركبات متجه التسارع السطحي :

$$W'_x = \frac{1}{2}(yz'' - y''z)$$

$$W'_y = \frac{1}{2}(x''z - xz'')$$

$$W'_z = \frac{1}{2}(xy'' - x''y)$$

حالة خاصة :

التسارع السطحي في الإحداثيات الديكارتية (في الحركة المستوية):

$$\vec{W}=\frac{1}{2}(\vec{r}\wedge\vec{\gamma})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ x'' & y'' & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(xy''-x''y)\,\vec{k}$$

التسارع السطحي في الإحداثيات القطبية:

التسارع اللحظي في الإحداثيات القطبية:

$$\vec{\gamma}=(r''-r\theta'^2)\,\vec{e_r}+(2r'\theta'+r\theta'')\,\vec{e_\theta}$$

$$\gamma_r=r''-r\theta'^2$$

$$\gamma_\theta=2r'\theta'+r\theta''=\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\theta')$$

وبالتالي التسارع السطحي:

$$\vec{W}'=\frac{1}{2}(\vec{r}\wedge\vec{\gamma})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{e_r} & \vec{e_\theta} & \vec{e_3}\\ r & 0 & 0\\ r''-r\theta'^2 & \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta') & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(r^2\theta')\,\vec{e_3}$$

$$\boxed{\vec{W}'=\frac{1}{2}(r^2\theta')'=\frac{r}{2}(2r'\theta'+r\theta'')=\frac{r}{2}\gamma_\theta}$$

الحركة الخاضعة لقانون السطوح:

تعريف:

نقول عن حركة النقطة المستوية M بأنها خاضعة لقانون السطوح إذا كانت السرعة السطحية ثابتة.

وعليه فالحركة الخاضعة لقانون السطوح تتعين بإحدى الصيغتين:

ديكارتياً $\quad W=\frac{1}{2}(xy'-x'y)=C$

قطبياً $\quad W=\frac{1}{2}r^2\theta'=C$

حيث C ثابت ويدعى ثابت السطوح.

ملاحظة هامة :

في الحركة الخاضعة لقانون السطوح تكون :

$$\vec{W} = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = c$$

$$\vec{W}' = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \vec{\gamma}) = 0$$ التسارع السطحي

أي أن $\vec{\gamma}_\theta = 0$ التسارع المماسي ينعدم ويبقى التسارع الناظمي الذي يمر دائماً بمركز الدوران أي أن :

$$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r}$$

أي أن التسارع في الحركات الخاضعة لقانون السطوح هو تسارع مركزي . وبالعكس كل حركة ذات تسارع مركزي فقط تكون خاضعة لقانون السطوح

تمرين :

M نقطة مادية تتحرك وفق المعادلتين :

$$\begin{cases} x = \theta\cos\theta \\ y = \theta\sin\theta \end{cases}$$

حيث $\theta^3 = Kt$ ، K ثابت

برهن أن حركة M خاضعة لقانون السطوح حول مبدأ الإحداثيات .

الحل :

حتى تكون الحركة خاضعة لقانون السطوح يجب أن تتحقق إحدى العلاقتين :

$$W = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) = c$$

أو

$$W = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = c$$

لنأخذ الأولى :

$$x = \theta\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = (\cos\theta - \theta\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$y = \theta\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = (\sin\theta + \theta\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

لدينا :

$$\theta^3 = Kt \Rightarrow 3\theta^2 d\theta = K dt \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{3\theta^2}$$

بالتعويض :

$$x' = \frac{K}{3\theta^2}(\cos\theta - \theta\sin\theta)$$

$$y' = \frac{K}{3\theta^2}(\sin\theta + \theta\cos\theta)$$

$$xy' - yx' = \theta\cos\theta\left[\frac{K}{3\theta^2}(\sin\theta - \theta\cos\theta)\right] - \theta\sin\theta\left[\frac{K}{3\theta^2}(\cos\theta - \right.$$

$$\left. + \theta\sin\theta)\right] = \frac{K}{3\theta^2}\cos\theta\sin\theta + \frac{K}{3}\cos^2\theta - \frac{K}{3\theta}\sin\theta\cos\theta +$$

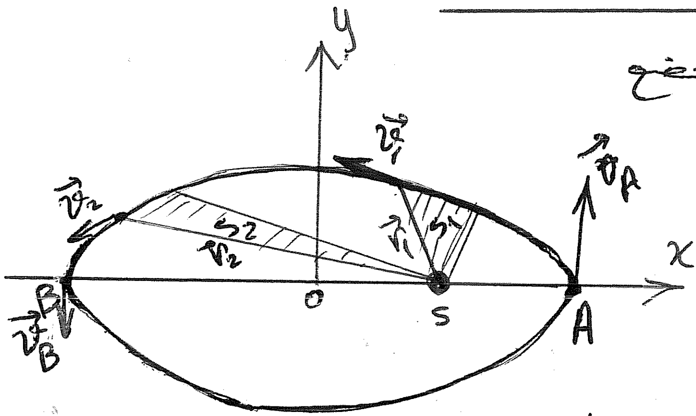
$$+ \frac{K}{3}\sin^2\theta$$

$$= \frac{K}{3}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \frac{K}{3} \quad \text{ثابت}$$

$$xy' - yx' = \frac{K}{3} = \text{Const}$$

فالحركة خاضعة لقانون السطوح .

تطبيق على حركة الكواكب والأقمار الصناعية :



إن حركة الكواكب حول الشمس تخضع لقوانين كبلر الثلاثة التالية :

1) إن مركز الكواكب يرسم مداراً مستوياً بشكل قطع ناقص يقع مركز الشمس في أحد محارقه

2) إن نصف القطر المتجه الواصل بين مركزي الشمس والكواكب يمسح سطوحاً متساوية في أزمنة متساوية (أي أن السرعة السطحية ثابتة).

- إن الكوكب عندما تكون في موضع معين مثل $\vec{r}_1$ فإنه يمسح سطحاً S_1 خلال فترة معينة

وإن هذا الكوكب نفسه في موضع آخر $\vec{r}_2$ سيمسح سطحاً S_2 مساوياً لـ S_1 في فترة مساوية للفترة السابقة.

أي أن : سيقطع الكوكب في دورانه حول الشمس مساحات متساوية في أزمنة متساوية

$$\vec{W}_1 = \vec{W}_2 \Rightarrow \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 = \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2$$

$$\boxed{r_1 v_1 = r_2 v_2}$$

وبناءً على ذلك :

نلاحظ أن سرعة الكوكب تكون أعظم ما يمكن عند A أقرب نقطة من محرق القطع الناقص (المسار) :

وتكون السرعة أقل ما يمكن عند النقطة B حيث يكون بعدها أعظم ما يمكن.

- معادلة المسار معطاة بالشكل القطبي

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\theta} \quad , \quad e < 1$$

حيث P وسيط القطع و e التباعد المركزي

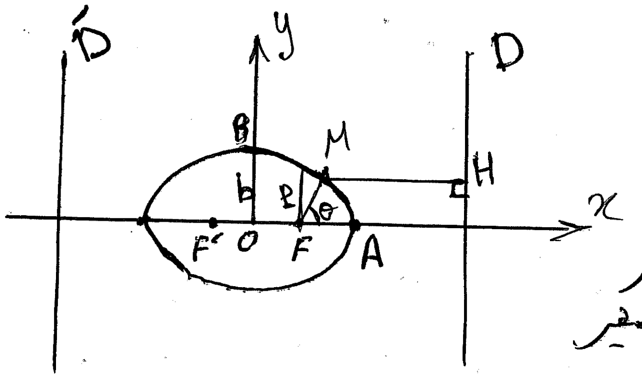
3) يتناسب مربع دور الكوكب حول الشمس T مع مكعب نصف المحور الكبير للمدار الناقص (a) أي :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m a^3}{K}$$

حيث : $K = GMm$ ،

m كتلة الكوكب و M كتلة الشمس و G ثابت الجاذبية .

و $a = OA = OB$.



تذكرة (القطع الناقص)

$\vec{r} = \vec{FM}$

$a = OA$ نصف قطر القطع الناقص الكبير

$b = OB$ نصف قطر القطع الناقص الصغير

$c = OF$

P هو نصف طول الوتر المحرقي العمودي

θ هي الزاوية بين $\vec{r}$ و $\vec{Ox}$

لإيجاد معادلة القطع الناقص :

$$d(MF) + d(MF') = 2a$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

قطع ناقص مركزه $O(0,0)$ ومحرقاه F و F'

$$c^2 = a^2 - b^2$$

في الإحداثيات القطبية معادلة القطع :

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\theta} \quad ; \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

حيث e التباعد المركزي :

$$e = \frac{MF}{MH} \quad ; \quad e \in]0, 1[$$

$$OF = ea \Rightarrow c = ea \Rightarrow \boxed{e = \frac{c}{a} < 1}$$

P وسيط القطع :

$P = eh$ ؛ $h = d(F, D)$ البعد بين المحرق والمقارب

$$\boxed{P = \frac{b^2}{a}}$$

إذا كان $e<1$ المسار قطع ناقص وإذا كان $e=1$ فالمسار قطع مكافئ وإذا $e>1$ فالمسار قطع زائد