كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

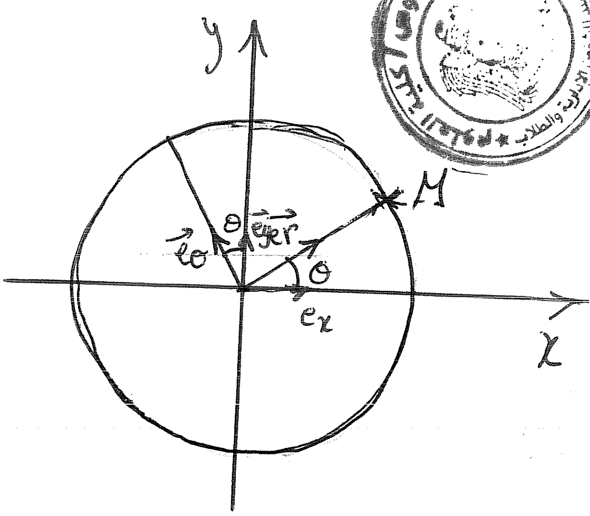
المادة : ميكانيك ١

المحاضرة : الخامسة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

محاضرة (5)



الحركة الدائرية في الاحداثيات الديكارتية :

لتكن M نقطة مادية تتحرك على دائرة نصف قطرها R .
سيكن تعيين M على الدائرة في xoy بالزاوية θ
ونصف القطر المتجهي $\theta = (\widehat{\vec{OX}, \vec{OM}})$

$$\vec{r} = \vec{OM}$$

- احداثيات M :

$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta$$

و $\theta = \theta(t)$ تابعة للزمن .

- سرعة النقطة M في الحركة الدائرية :

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta$$

وبالتالي متجه السرعة :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = -R\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{i} + R\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j}$$

وطويلته (السرعة العددية) :

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta} = R\dot{\theta} = R\omega$$

- التسارع في الاحداثيات الديكارتية :

$$\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

حيث :

$$\ddot{x} = -R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)$$
$$\ddot{y} = R(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)$$

التسارع العددي :

$$\gamma^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = R^2(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)^2 + R^2(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)^2$$
$$= R^2[\ddot{\theta}^2\sin^2\theta + 2\ddot{\theta}\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + \dot{\theta}^4\cos^2\theta + \ddot{\theta}^2\cos^2\theta - 2\ddot{\theta}\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta + \dot{\theta}^4\sin^2\theta]$$
$$= R^2(\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4) = R^2(\varepsilon^2 + \omega^4)$$
$$\Rightarrow \gamma = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

الحركة الدائرية في الاحداثيات القطبية :

متجه الموضع في الاحداثيات القطبية :

$$\vec{OM} = r\,\vec{e_r} = R\,\vec{e_r}$$

متجه السرعة :

في الاحداثيات القطبية : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$$r = R \Rightarrow \dot{r} = 0$$

متجه السرعة في الحركة الدائرية :

$$\vec{v}(M) = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = R\omega\,\vec{e_\theta}$$

السرعة محمولة على مماس الدائرة .

متجه التسارع :

لدينا علاقة التسارع في الاحداثيات القطبية :

$$\vec{\gamma}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{e_\theta}$$

لدينا : $r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

في الحركة الدائرية :

$$\vec{\gamma}(M) = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\dot{\theta} = \omega , \quad \ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \varepsilon$$

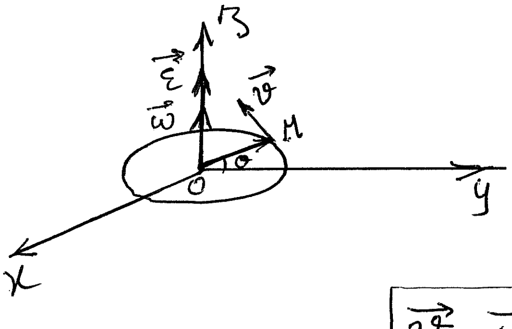
$$\vec{\gamma}(M) = -R\omega^2\,\vec{e_r} + R\varepsilon\,\vec{e_\theta}$$

نسمي :

$\vec{\gamma_r} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} = -R\omega^2\,\vec{e_r}$ التسارع الناظمي

$\vec{\gamma_\theta} = R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} = R\varepsilon\,\vec{e_\theta}$ التسارع المماسي

طريقة أخرى في إيجاد التسارع :



ليكن Oz عمودياً على مستو الدائرة (xoy)
ولنعتبر المتجه $\vec{\omega}$ المحمول على Oz الذي قياسه
الجبري ω واتجاهه هو الاتجاه الذي تكون
لأجله الثلاثية $\vec{\omega}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{OM}$ مباشرة .

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}}$$

أي أن السرعة في الحركة الدائرية هي الجداء المتجهي لمتجه السرعة الزاوية بنصف القطر المتجهي

ملاحظة:

إن مقياس السرعة لا يتغير سواء كانت الحركة الدائرية منتظمة أو غير منتظمة.

لأن لا نعطي: $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$ لا تتعلق بالتسارع الزاوي أما متجه التسارع فيختلف في الحالتين.

متجه التسارع:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} \quad ; \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R})$$

باستخدام علاقة جيبس:

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{R})}_{0} \vec{\omega} - \omega^2 \vec{R}$$

بالتعويض $\Longrightarrow$ $$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{R} - \omega^2 \vec{R} = R\varepsilon \vec{e_\theta} - \omega^2 R \vec{e_r}} \quad (1)$$

$$\vec{\gamma_\theta} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{R} = \varepsilon R \vec{e_\theta}$$

$$\vec{\gamma_r} = -\omega^2 \vec{R} = -\omega^2 R \vec{e_r}$$

$$\gamma^2 = \gamma_\theta^2 + \gamma_r^2 = \varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2 = R^2(\varepsilon^2 + \omega^4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

الحركة الدائرية في الاحداثيات الذاتية:

إذا كانت s هي الفاصلة المنحنية للنقطة المادية M المتحركة على الدائرة.

وكان ds عنصر قوس من مسار الحركة الدائرية و $d\theta$ الزاوية المركزية الجزئية المقابلة لهذا العنصر فإن:

$$ds = R\,d\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\theta}{dt} = R \cdot \dot{\theta} = R\omega$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = R\omega\vec{\tau}}$$

لدينا التسارع في الاحداثيات الذاتية يعطى بالعلاقة:

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

حيث:

التسارع المماسي : $\gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\varepsilon$

$\vec{\gamma}_\tau = R\varepsilon\vec{\tau}$

التسارع الناظمي : $\gamma_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$ ($\rho = R$ نصف قطر التقوس)

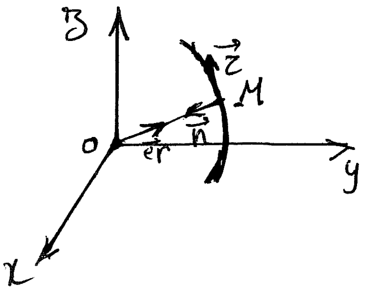
$\vec{\gamma}_n = R\omega^2\vec{n}$

والتسارع :

$$\boxed{\vec{\gamma} = R\varepsilon\vec{\tau} + R\omega^2\vec{n}} \quad (2)$$

$\gamma = |\vec{\gamma}| = R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$

ملاحظات :



1) إن اختلاف الإشارة لمركبة التسارع الناظمي نفسره كون الناظم الأساسي $\vec{n}$ يتجه دوماً نحو تقعر المسار في حالتنا (الحركة الدائرية) يكون اتجاه الناظم الأساسي للدائرة بعكس اتجاه نصف القطر المتجهي للنقطة M أي أن

$R\vec{n} = -\vec{OM} = -R\vec{e_r} = -\vec{R}$

2) إن التسارع المعطى بالعلاقة (1) و (2) متكافئتان :

$\vec{\varepsilon}\wedge\vec{R} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{R} = \varepsilon\vec{b}\wedge(-R\vec{n}) = -\varepsilon R[\vec{b}\wedge\vec{n}] = \varepsilon R[\vec{n}\wedge\vec{b}]$

$= \varepsilon R\vec{\tau} = \vec{\gamma}_\tau$

$-\omega^2\vec{R} = \omega^2(R\vec{n}) = R\omega^2\vec{n} = \vec{\gamma}_n$

الحركة الدائرية المنتظمة :

نقول عن الحركة بأنها دائرية منتظمة إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة :

$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$ ثابتة

وبالتالي : $\theta = \omega_0 t + \theta_0$

ويكون التسارع الزاوي : $\ddot{\theta} = 0$

والتسارع المماسي : $\gamma_\tau = 0$

والتسارع الناظمي : $\gamma_n = -R\omega_0^2\vec{e_r}$

أي أن :

$$\begin{cases} \vec{OM} = R\vec{e_r} \\ \vec{v} = R\omega_0\vec{e_\theta} \\ \vec{\gamma} = -R\omega_0^2\vec{e_r} \end{cases}$$

ملاحظة :

في هذه الحالة حتى ولو $v = R\omega_0 = c^{te}$ فإن التسارع غير معدوم لأن اتجاه متجه السرعة يتغير .

الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام :

نقول عن الحركة الدائرية بأنها متغيرة بانتظام إذا كان التسارع الزاوي ثابت :

$$\ddot{\theta} = \varepsilon = \varepsilon_0 = c^{te}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \varepsilon_0 t + \omega_0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e_r}$$

$$\vec{v}(M) = R\omega\,\vec{e_\theta} = R(\varepsilon_0 t + \omega_0)\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{\gamma}(M) = -R\omega^2\,\vec{e_r} + R\varepsilon_0\,\vec{e_\theta}$$

- تكون الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام متسارعة إذا كانت :

$$\vec{v}\cdot\vec{\gamma} = R\omega\,\vec{e_\theta}\,(-R\omega^2\vec{e_r} + R\varepsilon_0\vec{e_\theta}) = R^2\omega\varepsilon > 0 \quad , \quad \omega\cdot\varepsilon > 0$$

- تكون الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام متباطئة إذا كانت :

$$\omega\cdot\varepsilon < 0$$

تمرين :

طائرة تتحرك بسرعة ثابتة c في منحني دائري أفقي مركزه O ونصف قطره $R = 600\,m$ والمطلوب :

حدد السرعة c لتكون تسارع $\gamma = 6g$ ($g = 9.81\,m.s^{-2}$ تسارع الجاذبية الأرضية)

الحل :

الحركة هي دائرية منتظمة

$$\gamma = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2}{R} \Rightarrow c = \sqrt{\gamma R}$$

$$c = \sqrt{6 \times 9.8 \times 600} = 187{,}9\ m s^{-1} = 676\ Km.h^{-1}$$

تمرين :

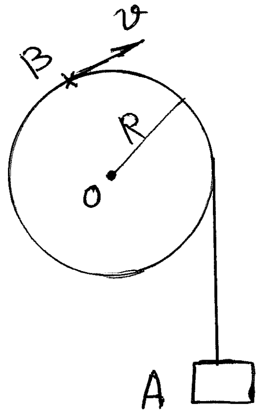
يربط جسم ثقيل A (كنقطة) بخيط طرفه الآخر ملفوف على بكرة نصف قطرها R . يترك هذا الجسم ليهبط شاقولياً بتسارع ثابت من الوضع السكوني ، بحيث يؤدي لتدوير البكرة . بعد مرور ثلاث ثواني من الزمن دارت البكرة تسع دورات.

والمطلوب :

أوجد سرعة وتسارع نقطة ما B من محيط البكرة في اللحظة $t = 5\,s$

كذلك أوجد سرعة وتسارع الجسم A .

الحل:



البكرة تدور بتسارع ثابت $\Leftarrow$

$$\theta = \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

من شروط البدء في اللحظة $t=0$ ، $\theta = 0 \Leftarrow \theta_0 = 0$

$$\theta = \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2 + \omega_0 t$$

السرعة الزاوية لدوران البكرة:

$$\theta' = \varepsilon_0 t + \omega_0$$

في اللحظة $t=0$ كان $\theta = 0$ ، $\omega = 0 \Leftarrow \omega_0 = 0$

$$\Rightarrow \theta' = \omega = \varepsilon_0 t \quad , \quad \theta = \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2$$

لدينا في المسألة أنه بعد مرور 3 ثواني دارت البكرة تسع دورات أي دارت بزاوية قدرها:

$$\theta = 9(2\pi)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2 \Rightarrow 9(2\pi) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (3)^2 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 = 4\pi}$$

وبالتالي معادلة الحركة:

$$\theta = \frac{1}{2}(4\pi)t^2 = 2\pi t^2 \quad , \quad \boxed{\theta = 2\pi t^2}$$

السرعة الزاوية:

$$\theta' = \varepsilon_0 t = 4\pi t \quad , \quad \boxed{\theta' = 4\pi t}$$

لإيجاد السرعة الزاوية للبكرة في اللحظة $t=5$ نعوض

$$\theta' = \omega = 4\pi(5) = 20\pi$$

- سرعة النقطة B الواقعة على محيط البكرة في اللحظة $t=5$

$$v = R.\omega = 20\pi R$$

- تسارع النقطة B في اللحظة $t=5$

التسارع المماسي $\gamma_\tau = R\varepsilon = 4\pi R$

التسارع الناظمي $\gamma_n = R\omega^2 = R(20\pi)^2 = 400\pi^2 R$

$$\gamma = \sqrt{\gamma_\tau^2 + \gamma_n^2} = \sqrt{(4\pi R)^2 + (400\pi^2 R)^2} = R\sqrt{16\pi^2 + 160000\pi^4}$$

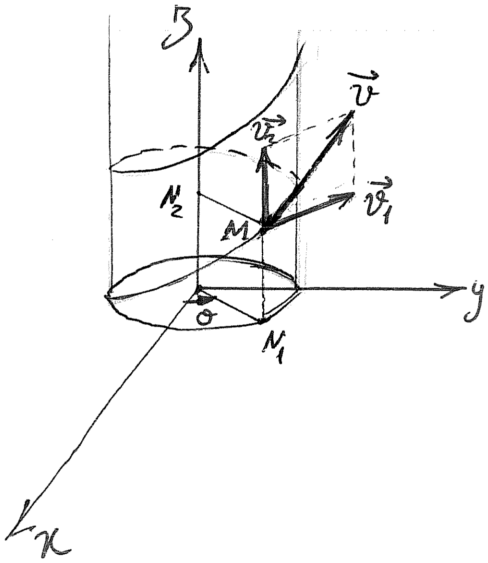
نلاحظ أن سرعة الجسم A في اللحظة $t=5$ ستكون مساوية لسرعة النقطة B في نفس اللحظة.

أما تسارع A في اللحظة $t=5$ فيكون مساوياً للتسارع المماسي للنقطة B في نفس اللحظة لأن النقطة A تتحرك حركة مستقيمة على الخيط (مماس البكرة)

أي أن:

$$v_A = v_B = 20\pi R$$

$$\gamma_A = \gamma_t(B) = 4\pi R$$



الحركة اللولبية:

نقول عن حركة نقطة أنها لولبية إذا كان مسارها لولباً دائرياً.

واضح أن مسار الحركة اللولبية يكون مرسوماً على سطح اسطوانة دائرية نصف قطرها R.

المعادلات الوسيطية للحركة اللولبية:

$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta$$
$$z = b\theta$$

حيث R و b ثابتان و $\theta = \theta(t)$

- نلاحظ أن حركة مسقط النقطة M على المستوي xoy (النقطة N_1) هي حركة دائرية مركزها o مبدأ الإحداثيات وبالتالي معادلات حركة النقطة N_1:

$$x = R\cos\theta \quad , \quad y = R\sin\theta$$

- حركة مسقط النقطة M على المحور oz (النقطة N_2) هي حركة مستقيمة وبالتالي جميع العلاقات التي درسناها في الحركة الدائرية صحيحة من أجل مسقط الحركة اللولبية على المستوي xoy وأيضاً بالنسبة للمسقط N_2 على oz تكون العلاقات محققة في دراسة الحركة المستقيمة.

- يدعى العدد b بخطوة اللولب المختزلة أما $2\pi b$ فتدعى بخطوة اللولب وهي عبارة عن البعد بين أية نقطتين من اللولب كائنتين على مولد واحد للاسطوانة وموافقة لقيمتين للزاوية θ تكون الفرق بينهما 2π.

- سندرس هنا الحركة في الإحداثيات الاسطوانية (r, θ, z)

متجه الموضع :

في الاحداثيات الاسطوانية متجه الموضع هو:

$$\vec{OM} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}$$

في الحركة اللولبية متجه الموضع هو:

$$\boxed{\vec{OM} = R\,\vec{e_r} + b\theta\,\vec{e_z}}$$

السرعة :

السرعة في الاحداثيات الاسطوانية هي :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z}$$

فسرعة النقطة M في الحركة اللولبية :

$$\boxed{\vec{v}(M) = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + b\dot{\theta}\,\vec{e_z}}$$

فسرعة M لها مركبتان إحداهما $\vec{v_1}$ في المستوي xoy وهي سرعة M_1 (مسقط M على المستوى xoy) في حركتها الدائرية وقيمتها الجبرية :

$$v_1 = R\dot{\theta}$$

والثانية $\vec{v_2}$ محمولة على المحور oz وهي سرعة N_2 (مسقط M على المحور oz) في حركتها المستقيمة وقيمتها الجبرية

$$v_2 = b\dot{\theta}$$

- نلاحظ أن متجه السرعة واقع في المستوي المماس للاسطوانة ويميل على مولدها بزاوية ثابتة β :

$$tg\,\beta = \frac{R}{b}$$

السرعة العددية :

$$v^2 = (R^2 + b^2)\,\dot{\theta}^2$$

$$v = \dot{\theta}\sqrt{R^2 + b^2}$$

إذا رمزنا بـ l لوتر مثلث قائم الزاوية ضلعاه القائمتان R، b كان

$$v = l\dot{\theta}$$

أي أن :

$$v_1 = R\dot{\theta} \quad , \quad v_2 = b\dot{\theta} \quad , \quad v = l\dot{\theta}$$

التسارع :

نعلم أن التسارع بالاحداثيات الاسطوانية هي :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{e_\theta} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$$

وبالتالي فإن تسارع النقطة M في الحركة اللولبية هي :

$$\boxed{\vec{\gamma} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + b\ddot{\theta}\,\vec{e_z}}$$

فالتسارع مركبتان إحداهما :

$$\vec{\gamma_1} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$$

وهي تسارع المسقط M_1 على المستوي xoy في حركته الدائرية .

والمركبة الثانية :
$$\vec{\gamma_2} = b\ddot{\theta}\vec{e_z}$$

وهي تسارع المسقط M_2 على المحور oz في حركته المستقيمة .

ونرى أيضاً من علاقة التسارع أنه يمكن تفريق تسارع M إلى مركبتين إحداهما :

$$\vec{\gamma_\tau} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + b\ddot{\theta}\vec{e_z}$$

كائنة في المستوي المماس في M للاسطوانة وقيمتها العددية .

$$\gamma_\tau = l\ddot{\theta}$$

والمركبة الثانية :
$$\vec{\gamma_n} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} = MN_2\dot{\theta}^2$$

كائنة على الناظم لسطح الاسطوانة في M .

- إن نصف قطر التقوس الولبي في نقطة ما منه هو :

$$\rho = \frac{R^2+b^2}{R} \qquad \left(\rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{(R^2+b^2)\dot{\theta}^2}{R\dot{\theta}^2} = \frac{R^2+b^2}{R}\right)$$

الحركة اللولبية المنتظمة :

نعلم أنه في الحركة المنتظمة تكون السرعة العددية ثابتة

وقد رأينا أن السرعة العددية في الحركة اللولبية :

$$v = l\dot{\theta}$$

فالسرعة الزاوية $\omega = \dot{\theta}$ تكون ثابتة وبالتالي تكون :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

باختيار مناسب لمبدأ الزمن تكون : $\theta = \omega t$

وتصبح الاحداثيات الاسطوانية لـ M في الحركة اللولبية المنتظمة :

$$r = R \quad , \quad \theta = \omega t \quad , \quad z = b\omega t$$

وتصبح بالتالي احداثيات M الديكارتية هي :

$$x = R\cos\omega t \quad , \quad y = R\sin\omega t \quad , \quad z = b\omega t$$

متجه الموضع : $\vec{OM} = R\vec{e_r} + b\omega t\,\vec{e_z}$

السرعة : $\vec{v}(M) = (R\vec{e_\theta} + b\vec{e_z})\omega$

التسارع : $\vec{\gamma_n} = -R\omega^2\vec{e_r}$; $\vec{\gamma} = \vec{\gamma_n}$, $\vec{\gamma_\tau} = \vec{0}$

$$\vec{\gamma} = -R\omega^2\vec{e_r}$$

ونصف قطر التقوس : $\rho = \frac{R^2+b^2}{R}$