كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك ١

المحاضرة : الثالثة /نظري/

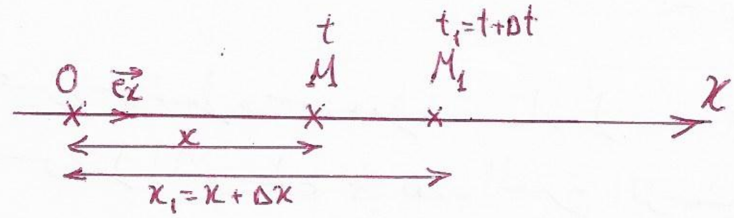
{{ A to Z مكتبة }}

2025 2024

Facebook Group : A to Zمكتبة

دراسة بعض الحركات الشهيرة :

الحركة المستقيمة :



نقول عن حركة نقطة مادية M أنها مستقيمة إذا كان مسار هذه النقطة مستقيم .

متجه الموضع : $\vec{OM} = x\,\vec{e_x}$

معادلة الحركة : $x = x(t)$

متجه السرعة :

إذا كانت النقطة المادية في الموضع M في اللحظة (t) وأصبحت في الموضع M_1 في اللحظة $(t_1 = t+\Delta t)$ عندئذٍ الانتقال من M إلى M_1 خلال الفترة Δt هو :

$$MM_1 = OM_1 - OM = x_1 - x = \Delta x$$

السرعة الوسطى :

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x}{t_1 - t}$$

السرعة اللحظية :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad , \quad \vec{v} = \dot{x}\,\vec{e_x}$$

متجه التسارع :

إذا كانت النقطة المادية M تسير في اللحظة t بسرعة v وفي اللحظة t_1 تسير بالسرعة v_1 عندئذٍ التسارع الوسطي هو :

$$\gamma_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v}{t_1 - t}$$

ويكون التسارع اللحظي :

$$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad , \quad \vec{\gamma} = \ddot{x}\,\vec{e_x}$$

ملاحظة :

إذا أعطيت المسافة x كتابع للزمن (t) فنحصل على السرعة والتسارع بالاشتقاق بالنسبة للزمن . أما إذا كانت السرعة v معطاة كتابع للمسافة فيكون :

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dx}$$

تمرين :

تتحرك نقطة مادية على محور x بحيث أن موضعها يتحدد بالعلاقة :

$$x = 2t^2 + 3t$$

عين موضعها وسرعتها وتسارعها عند اللحظتين $t = 2s$ ، $t = 1s$ وما هي سرعتها المتوسطة في هذه الفترة الزمنية وما هو التسارع المتوسط.

الحل :

$$x = 2t^2 + 3t$$

بالاشتقاق :

$$v = \dot{x} = 4t + 3$$

$$\gamma = \ddot{x} = 4$$

$$t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = 5 \ , \ v_1 = 7 \ , \ \gamma_1 = 4$$

$$t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = 14 \ , \ v_2 = 11 \ , \ \gamma_2 = 4$$

إن السرعة المتوسطة هي :

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{14-5}{2-1} = 9$$

التسارع المتوسط :

$$\gamma_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{11-7}{2-1} = 4$$

الحركة المستقيمة المنتظمة :

نقول عن الحركة المستقيمة للنقطة M بأنها منتظمة إذا كانت سرعتها ثابتة :

$$v = \dot{x} = v_0 \quad \text{ثابت}$$

أي أن السرعة العددية ثابتة $\vec{v} = v_0 \vec{e_x}$

بالاشتقاق ⟸ التسارع معدوم $\gamma = 0$ أو $\vec{\gamma} = \vec{0}$

(السرعة العددية ثابتة ⟸ التسارع معدوم فقط في الحركة المستقيمة المنتظمة، وإلا فالتسارع المماسي معدوم والتسارع هو تسارع ناظمي)

بتكامل السرعة :

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

حيث : x_0 هو الموضع الابتدائي للنقطة M (أي موضع M في اللحظة $t = 0$)

ويمكن كتابة :

$$\vec{OM} = x(t)\,\vec{e_x}$$

$$\vec{OM} = (v_0 t + x_0)\,\vec{e_x}$$

الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام :

نقول عن الحركة المستقيمة للنقطة M أنها متغيرة بانتظام إذا كان تسارعها ثابت.

$$\gamma = \frac{d^2x}{dt^2} = \gamma_0 \quad \text{ثابت}$$

أو

$$\vec{\gamma} = \gamma_0 \vec{e_x}$$

بالتكامل :

$$v = \gamma_0 t + v_0$$

أو

$$\vec{v} = (\gamma_0 t + v_0)\vec{e_x}$$

حيث v_0 هي السرعة الابتدائية (أي سرعة النقطة المادية في اللحظة الابتدائية $t=0$)

وبالتالي بالتكامل أيضاً :

$$x = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

أو :

$$\vec{OM} = \left(\frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t + x_0\right)\vec{e_x}$$

حيث x_0 هو $\vec{OM}(t_0=0)$ الموضع الابتدائي لـ M في اللحظة الابتدائية $t=0$

تذكرة :

- رأينا أن الحركة تكون متقدمة (تقدمية - مباشرة) إذا كانت $v>0$
- وتكون تراجعية (رجعية) إذا كانت $v<0$
- وإذا كان $\vec{v}.\vec{\gamma} = v.\gamma > 0$ نقول عن الحركة متسارعة.
- إذا كان $\vec{v}.\vec{\gamma} = v.\gamma < 0$ نقول عن الحركة المستقيمة بأنها متباطئة.

تمرين :

سيارة تتحرك على خط مستقيم أفقي بتسارع ثابت $\gamma = 6\,ms^{-2}$.
أوجد الزمن اللازم من أجل الوصول من 0 إلى $100\,Km.h^{-1}$ وأوجد المسافة المقطوعة.

الحل : نأخذ جملة احداثيات مرتبطة بالطريق $(OXYZ)$

متجه التسارع a ثابت $\vec{\gamma}(M) = a\vec{e_x}$

بالتكامل : $\vec{v}(M) = (at + v_0)\vec{e_x} \Rightarrow \vec{v}(M) = at\vec{e_x}$

في اللحظة $t=0$ (انطلاق M من O أي $x_0=0$) مع سرعة معدومة $v_0=0$

بالتكامل :

$$\vec{OM} = \frac{at^2}{2}\vec{e_x}$$

وبالتالي الزمن اللازم للوصول إلى السرعة $v = 100\,Km.h^{-1}$;

$$t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{100 \times 1000}{3600}}{6} = \frac{\frac{1000}{36}}{6} = 4.63\ s$$

المسافة المقطوعة :

$$x(t) = \frac{at^2}{2} = \frac{6 \cdot (4.63)^2}{2} = 64.3\ m$$

تمرين :

نقطة مادية تسير على المحور ox بحركة تسارعها :

$$\gamma = 6t - 2$$

أوجد سرعة هذه النقطة وموضعها بدلالة الزمن إذا افترضنا أن :

$$t = 0 \quad , \quad v_0 = 1 \quad , \quad x_0 = -1$$

ثم أوجد سرعة النقطة العظمى والصغرى .

الحل : بالتكامل :

$$v = 3t^2 - 2t + v_0$$

في اللحظة $t = 0$ كانت $v_0 = 1$

$$\boxed{v = 3t^2 - 2t + 1}$$

بالتكامل مرة ثانية :

$$x = t^3 - t^2 + t + c$$

من شروط البدء في $t = 0$ كان $x = x_0 = -1$ $\Leftarrow$ $c = -1$

$$\boxed{x = t^3 - t^2 + t - 1}$$

لإيجاد السرعة العظمى والصغرى :

$$v' = 6t - 2 \quad , \quad v' = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

لمعرفة إذا كانت السرعة عظمى أو صغرى نأخذ المشتق الثاني :

$$v'' = 6 > 0 \quad \text{(النهاية صغرى)}$$

نعوض في v $t = \frac{1}{3}$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

وهي سرعة النقطة الصغرى .

ولا توجد نهاية عظمى (سرعة عظمى) لأن السرعة متزايدة باستمرار .

تمرين : عين المعادلة الزمنية لحركة متغيرة بانتظام إذا علم أن التسارع العددي يساوي (8) وسرعة البدء تساوي (-5) والفاصلة المنحنية الابتدائية تساوي (-3)

الحل :

$$S_0 = -3 \quad , \quad v_0 = -5 \quad , \quad \gamma = 8$$

$$\gamma = 8 \xrightarrow{\text{بالتكامل}} v = 8t + v_0 = 8t - 5$$

$$\xrightarrow{\text{بالتكامل}} \quad S = 4t^2 - 5t + S_0$$

المعادلة الزمنية للحركة

$$\boxed{S = 4t^2 - 5t - 3}$$

الحركة الاهتزازية التوافقية

نقول عن الحركة المستقيمة بأنها توافقية إذا كان متجه الموضع هو تابع تجيب للزمن أي أن :

$$\vec{OM} = x(t)\,\vec{e}_x$$

حيث :

$$x(t) = a\cos(\omega t \mp \varphi)$$

(أو $x(t) = a\sin(\omega t \mp \varphi)$)

حيث a سعة الحركة و ω نبض الحركة و $(\omega t \mp \varphi)$ طور الحركة أو صفحة الحركة و φ الصفحة الابتدائية ويسمى x مطال الحركة . هنا مركز الاهتزاز هو o

والحركة هي حركة دورية $T = \frac{2\pi}{\omega}$ وتكرارها (تواترها) هو $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

والمتحرك M يتحرك على مسار o بين موضعين $[-a, a]$ (مجال الحركة)

متجه السرعة :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = -a\omega\sin(\omega t \mp \varphi)\,\vec{e}_x$$

(أو : $\dot{x} = a\cos(\omega t \mp \varphi)$)

متجه التسارع :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a\omega^2\cos(\omega t \mp \varphi)\,\vec{e}_x$$

(أو : $\ddot{x} = -a\omega^2\sin(\omega t \mp \varphi)$)

ونستنتج أن : $\vec{\gamma} = -\omega^2\vec{OM}$

وبما أن $\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$ وبالتالي يمكن التعبير عن الحركة المستقيمة التوافقية بالمعادلة التفاضلية :

$$\boxed{\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} + \omega^2\vec{OM} = \vec{0}}$$

بالإسقاط على المحور ox نكتب هذه المعادلة بالشكل :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

ملاحظات :

1) يمكن كتابة موضع النقطة M بالشكل التالي :

$$x(t) = a\cos\omega t\cos\varphi \pm a\sin\omega t\sin\varphi$$

$$\boxed{x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t}$$

حيث : $A = a\cos\varphi$, $B = -a\sin\varphi$

- وإذا كانت المعادلة الزمنية للحركة معطاة بالعلاقة

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

يمكن ردها إلى الشكل :

$$\boxed{x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)}$$

حيث السعة a هي $a = \sqrt{A^2 + B^2}$

والصفحة الابتدائية φ هي : $tg\varphi = \frac{-B}{A}$

2) إذا اختلف مركز الاهتزاز عن (o) تصبح معادلة الحركة بالشكل :

$$x = x_0 + a\sin(\omega t + \varphi)$$

(أو $x = x_0 + a\cos(\omega t + \varphi)$)

ويكون مجال الحركة هو المجال $[x_0 - a , x_0 + a]$

حيث x_0 مركز الاهتزاز .

دراسة الحركة الاهتزازية التوافقية :

لدراسة هذا النوع من الحركات نضع الجدول التالي

الأزمنة خلال طور الحركة	t
مواضع النقطة	x
إشارة السرعة بين النقاط التي ينعدم عندها المشتق	x'
إشارة التسارع بين النقاط التي ينعدم عندها التسارع	x''
جداء الإشارات	$x' \cdot x''$
إذا كانت متباطئة أو متسارعة وتقدمية أو تراجعية	وصف الحركة

تمرين :

ليكن لدينا : $x = -3 + 2\cos\pi\omega t$

أوجد: مركز الاهتزاز وسعة الحركة ومجال الحركة وطورها ونبضها ودور الحركة وتواترها (تكرار الحركة) .

ثم ادرس الحركة .

الحل : لدينا معادلة الحركة من الشكل :

$$x = x_0 + a\cos(\omega t + \varphi)$$

من المعادلة نلاحظ :

مركز الاهتزاز هو $x_0 = -3$ ، سعة الحركة $a = 2$ ، طور الحركة $\pi\omega t$

مجال الحركة : $[x_0 - a, x_0 + a] = [-3-2, -3+2] = [-5, -1]$

نبض الحركة $\pi\omega$ (أمثال t)

دور الحركة : $T = \frac{2\pi}{\omega\pi} = \frac{2}{\omega}$

تواتر الحركة : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2}$

دراسة الحركة :

$x = -3 + 2\cos\pi\omega t$

لنوجد x' :

$x' = -2\pi\omega \sin\pi\omega t$

$x' = 0 \Rightarrow \sin\pi\omega t = 0$

$\Rightarrow \pi\omega t = K\pi$

من أجل $K = 0 \Leftarrow t = 0$

من أجل $K = 1 \Leftarrow t = \frac{1}{\omega}$

من أجل $K = 2 \Leftarrow t = \frac{2}{\omega}$

لنوجد x'' :

نشتق بالنسبة للزمن :

$x'' = -2\pi^2\omega^2 \cos\omega\pi t$

$x'' = 0 \Rightarrow \cos\pi\omega t = 0 \Rightarrow \pi\omega t = \frac{\pi}{2} + K\pi$

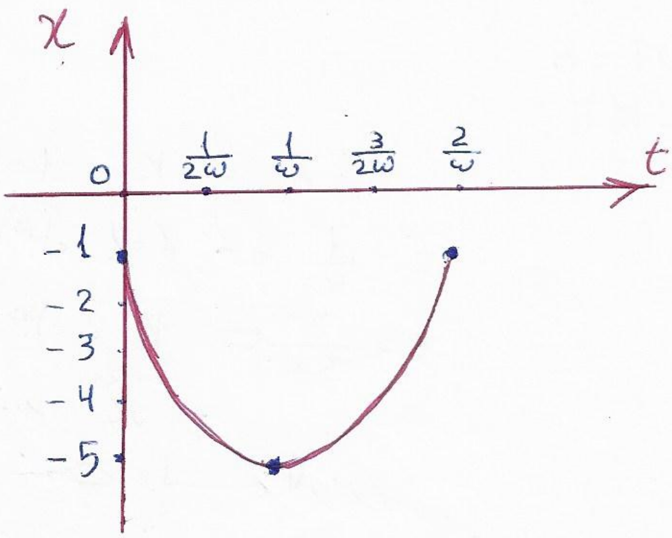
لنعطي قيم لـ K :

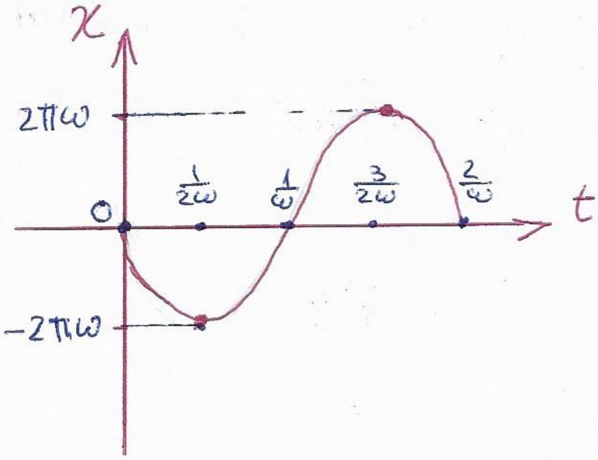
$K = 0 \Rightarrow \pi\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2\omega}$

$K = 1 \Rightarrow \pi\omega t = \frac{\pi}{2} + \pi \Rightarrow t = \frac{3}{2\omega}$

لنضع هذه القيم في جدول :

t	0		$\frac{1}{2\omega}$		$\frac{1}{\omega}$		$\frac{3}{2\omega}$		$\frac{2}{\omega}$
x	-1		$—$		-5		$—$		-1
x'	0		$—$		0		$+$		0
x''		$—$	0	$+$		$+$	0	$—$	
$x'.x''$		$+$		$—$		$+$		$—$	
وصف الحركة		متسارعة تراجعية		متباطئة تراجعية		متسارعة تقدمية		متباطئة تقدمية	





د. هالا محمد