كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك١

المحاضرة : الاولى/نظري/د . سراب محمود

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

حركة النقطة المادية :

الحركة : هي فرع من فروع الميكانيك الذي يختص بدراسة الحركة وخصائصها دون التعرض للمؤثرات (القوى) التي تغير في حالة هذه الحركة وبالتالي علم الحركة يبحث في تحديد مواضع الأجسام المتحركة ومساراتها وسرعاتها وتسارعاتها بالنسبة للزمن والعلاقات التي قد تكون بين هذه الكميات

النقطة المادية :

هي جسم لامتناهي في الصغر .

يمكن دراسة الجسم على أساس أنه نقطة مادية إذا كانت المسافات المقطوعة كبيرة مقارنة مع أبعاد الجسم . (جسم مادي له كتلة ويمكن إهمال أبعاده مقارنة مع كتلته)

درجات حرية النقطة المادية :

هي عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع النقطة المادية (عدد الاتجاهات التي يمكن أن تتحرك إذا تحركت نقطة مادية في الفراغ حركة غير مقيدة بقيود لزم لتحديد موضعها في أي لحظة ثلاث إحداثيات ويقال إن للنقطة المادية ثلاث درجات حرية .

إذا وضعنا قيداً واحداً على حركة النقطة المادية أنقصنا درجات حريتها درجة واحدة . وكلما ازدادت القيود قيداً أنقصت درجات الحرية لهذه النقطة درجة .

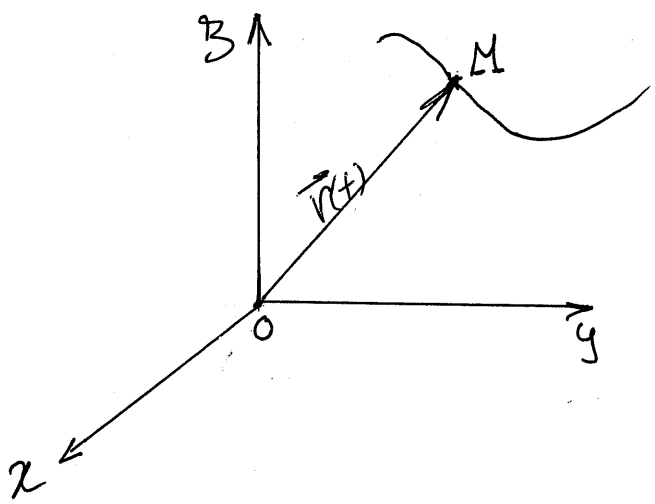
فمثلاً لو تحركت نقطة مادية في مستو ثابت معلوم وبالتالي لزم لتحديد موضعها في مستو حركتها بعدان اثنان وفي هذه الحالة يكون للنقطة المادية درجتا حرية . وإذا تحركت النقطة المادية على خط ثابت معلوم فيكون لها درجة حرية واحدة.

عدد درجات الحرية = عدد الوسطاء التي تعين النقطة المادية - عدد العلاقات التي تربط هذه الوسطاء (عدد علاقات الارتباط)

مسار النقطة المادية :

هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي تمر بها النقطة المادية المتحركة (الجسم المتحرك) في لحظات متتابعة .

الحركة المنحنية لنقطة مادية (معادلات الحركة):



يمكن تحديد وضع النقطة المادية M بواسطة نصف القطر المتجهي

$$\vec{r} = \vec{OM}$$

لتحديد حركة النقطة يجب معرفة تغير نصف القطر المتجهي $\vec{r}$ أثناء تغير الزمن أي يلزم معرفة:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{OM}(t) \quad (1)$$

وبالتالي المسار هو عبارة عن المحل الهندسي لذاية المتجه $\vec{r}$.

إذا كان مسار النقطة M بالنسبة لجملة إحداثيات معين فإننا نقول أن هذه الحركة معينة.

إن العلاقة (1) تحدد حركة النقطة المادية M بالطريقة المتجهية وتسمى المعادلة المتجهية للحركة.

تنتج عن هذه المعادلة ثلاث معادلات عددية إذا أخذنا جملة إحداثيات ديكارتية $Oxyz$ فإن وضع النقطة M يتحدد بإحداثياتها كتوابع للزمن (t):

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

تدعى هذه المعادلات بمعادلات حركة النقطة M في الإحداثيات الديكارتية أو بالمعادلات الوسيطية للحركة.

لإيجاد المسار نحذف الزمن من معادلات الحركة فنحصل على المعادلة الديكارتية للمسار.

إذا كانت حركة النقطة M تتم في مستو فإنه يلزم معادلتان فقط لتحديد حركتها. أما إذا كانت الحركة مستقيمة فيلزم معادلة واحدة.

متجه السرعة في الحركة المنحنية:

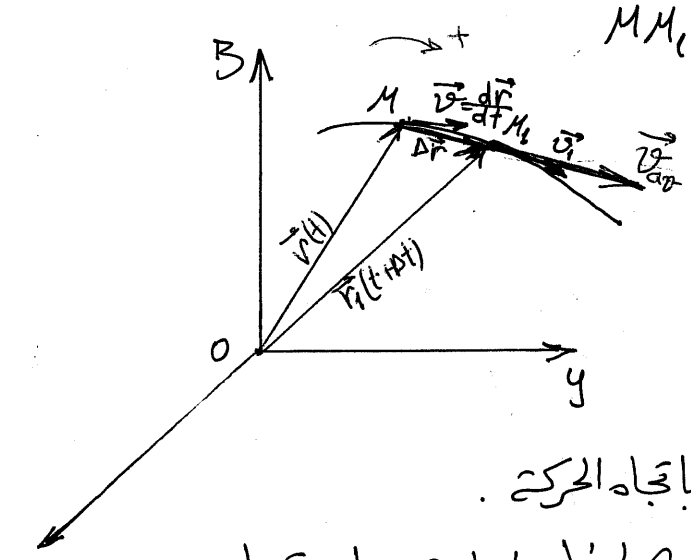
وجدنا أن وضع حركة النقطة M يتحدد:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = o\vec{M}(t)$$

لنفرض أن النقطة المادية في اللحظة t كانت في الموضع M المحدد بنصف القطر المتجهي $\vec{r}$ وفي اللحظة t_1 أصبحت في الموضع M_1 المحدد بـ $\vec{r}_1$

عندئذٍ خلال الفترة $\Delta t = t_1 - t$ انتقلت النقطة من M إلى M_1 بمقدار:

$$M\vec{M}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta\vec{r}$$



- تسمى السرعة الوسطى $\vec{v}_{av}$ هي النسبة لمتجه الانتقال $\Delta\vec{r}$ على الفترة الزمنية Δt المقابلة لهذا الانتقال أي أن:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{t_1 - t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

وهي متجه ينطبق على الوتر $\Delta\vec{r}$ ويتجه باتجاه الحركة.

- إن سرعة النقطة اللحظية (الآنية) في لحظة زمنية ما تساوي نهاية النسبة السابقة عندما $\Delta t \to 0$ أي أن:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M\vec{M}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

وبالتالي:

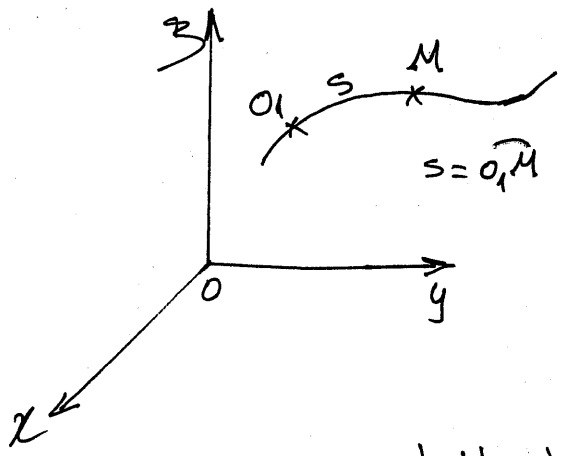
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

أي أن سرعة النقطة M في لحظة زمنية ما تساوي مشتق نصف قطرها المتجهي بالنسبة للزمن. لذلك تدعو السرعة $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ بالسرعة اللحظية.

وبما أن اتجاه المتجه $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ عندما $\Delta t \to 0$ ينطبق مع اتجاه مماس المنحني لهذا فالسرعة تنطبق على مماس المسار وتأخذ جهته.

- يجب التمييز بين مفهوم الانتقال ومفهوم الطريق المقطوع (المسافة المقطوعة) حيث أن النقطة المادية انتقلت خلال الفترة Δt بمقدار $\Delta\vec{r}$ أما المسافة المقطوعة خلال الفترة Δt هو طول القوس $M\vec{M}_1$ من المسار

معادلة الحركة في الإحداثيات الذاتية :



لتكن لدينا النقطة المادية M تتحرك على مسارها المحدد بنقطة بدء O_1 في حلج إحداثيات متعامدة نظامية $Oxyz$ تعطى الحركة في هذه الحالة وفق القانون :

$$s = s(t)$$

حيث : s هي الفاصلة المنحنية $s = \overset{\frown}{O_1M}$

وتمثل هذه المعادلة معادلة الحركة في الإحداثيات الذاتية .

- بالعودة إلى الفقرة السابقة :

لنحسب طول متجه السرعة (قيمة السرعة العددية) :

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \cdot \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\overrightarrow{MM_1}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\overrightarrow{MM_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta \vec{r}}{\overrightarrow{MM_1}} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} \right|$$

لدينا : النهاية الأولى $\lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta \vec{r}}{\overrightarrow{MM_1}} = 1$ لأنه في الخطات القريبة لا نفرق بين القوس والوتر

$\Leftarrow$ الانتقال يساوي الطريق المقطوع $\Leftarrow$ تصبح النهاية مساوية للواحد.

أما النهاية الثانية $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ فتشبه المشتق $\frac{ds}{dt}$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \left| 1 \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} \right| = \boxed{\frac{ds}{dt} = v} \qquad (2)$$

طول متجه السرعة يساوي مشتق الفاصلة المنحنية s بالنسبة للزمن t .

- إذا كان المشتق $\frac{ds}{dt} > 0$ فإن الحركة تكون تقدمية (مباشرة) ومتجه السرعة يتجه بالاتجاه الموجب للمسار (إشارة السرعة v والفاصلة x هي نفسها $x \cdot v > 0$)
- أما إذا كان $\frac{ds}{dt} < 0$ فإن الحركة على مسارها تكون تراجعية (رجعية) ومتجه السرعة يتجه بالاتجاه السالب للمسار (إشارة السرعة v والفاصلة x مختلفتين $x \cdot v < 0$)
- نلاحظ من العلاقة (2) أن $ds = v\,dt \Leftarrow s = \int v\,dt$

أي أن الفاصلة المقطوعة على قوس تساوي تكامل السرعة في زمن معين .

إذاً في الإحداثيات الديكارتية :

تكون متجه الموضع : $\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$

متجه السرعة : $\vec{v} = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k}$

وتكون السرعة العددية (القيمة الجبرية) :

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

راسم الخطى أو دليل السرع :

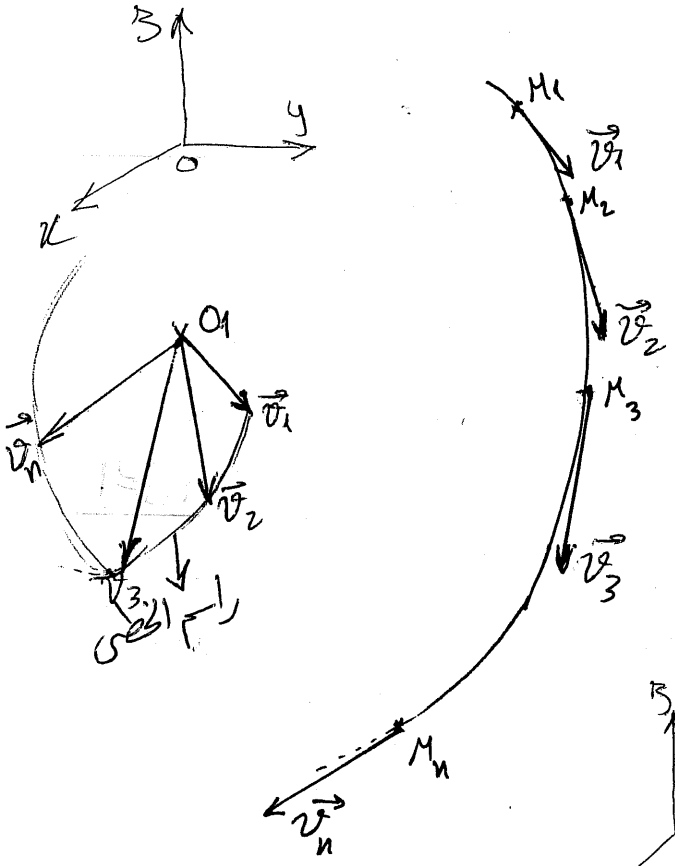
لتكن لدينا النقطة M المتحركة والتي تأخذ على مسارها المواضع $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ ... و متجهات السرعة الموافقة لهذه المواضع هي $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ على مسار الحركة .

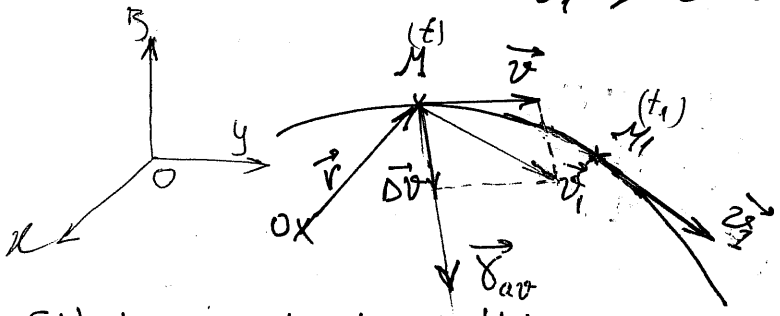
لنأخذ نقطة ثابتة في الفراغ ولتكن O_1 ونرسم منها مسيرات المتجهات $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ... ثم نصل نهايات هذه المتجهات فإننا نحصل على منحنى يدعى: راسم الخطى أو دليل السرع وبالتالي نعرف دليل السرع (راسم الخطى):

بأنه المحل الهندسي لنهايات متجهات السرع المقامة من نقطة واحدة اختيارية في الفضاء . لإيجاد معادلة راسم الخطى نحذف الزمن من الإحداثيات : $X = x(t)$ و $Y = y(t)$ ، $Z = z(t)$

متجه التسارع في الحركة المنحنية :

نفرض نقطة مادية تتحرك على منحنى في اللحظة t كانت في الموضع M وسرعتها $\vec{v}$ وفي اللحظة $t_1 = t + \Delta t$ أصبحت النقطة في الموضع M_1 وسرعتها $\vec{v}_1$





لنعين تزايد السرعة خلال الفترة Δt لذلك ننقل المتجه $\vec{v}_1$ إلى النقطة M. ونرسم متوازي الأضلاع الذي أحد أضلاعه $\vec{v}$ وقطره $\vec{v}_1$ فيكون الضلع الآخر هو $\Delta\vec{v}$ لأن $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$

تسمى النسبة

$$\vec{\gamma}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

بمتجه التسارع الوسطي. للمتجه $\vec{\gamma}_{av}$ نفس جهة $\Delta\vec{v}$ أي يتجه إلى داخل المسار.

تسمى نهاية متجه التسارع الوسطي عندما $\Delta t \to 0$ بمتجه التسارع الآني (اللحظي):

$$\vec{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

أي أن:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}''$$

إذاً: متجه التسارع للنقطة في كل لحظة زمنية يساوي المشتق الأول لمتجه السرعة أو المشتق الثاني لنصف القطر المتجه بالنسبة للزمن.

في الاحداثيات الديكارتية:

يكون التسارع: $\vec{\gamma} = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}$

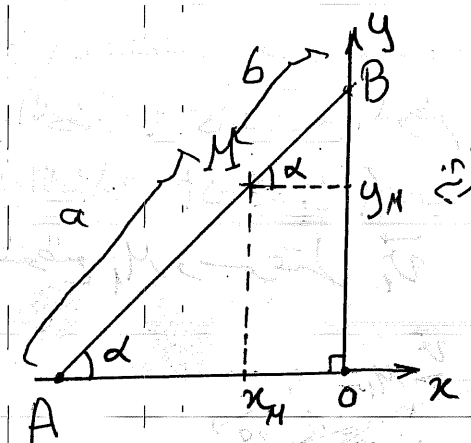
فيكون التسارع العددي (قيمة التسارع):

$$\gamma = |\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

تمرين:

AB سلم يستند بأحد طرفيه A على الأرض و بالطرف الآخر إلى الجدار و يصنع زاوية مع الأرض قدرها $\alpha = \omega t$.

أوجد معادلات الحركة للنقطة M التي تبعد عن A بمقدار (a) وتبعد عن B بمقدار (b) ثم أوجد معادلة المسار.



الحل:

لنوجد معادلات الحركة نوجد مساقط M على المحاور الاحداثية

$$\begin{cases} x = -b\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \end{cases}$$

وهي معادلات الحركة.

بالتربيع والجمع نجد:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

مسار النقطة M وهي تمثل قطع ناقص

تمرين: نقطة مادية تتحرك وفق المعادلات:

$$x = \frac{\sin t}{t} \quad , \quad y = \frac{\cos t}{t} \quad , \quad z = t$$

أوجد معادلة المسار.

الحل:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sin t}{t} \\ y &= \frac{\cos t}{t} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{بالتربيع وبالجمع}} \sin^2 t + \cos^2 t = x^2 t^2 + y^2 t^2 = 1$$

ولدينا $z = t$ $\Leftarrow$ $\boxed{(x^2+y^2)z^2 = 1}$

وهي معادلة المسار.

تمرين: نقطة مادية تتحرك في المستوي xOy إحداثياتها:

$$x = \frac{a^2 t^2}{2p} \quad , y = at$$

بفرض أن a و p عددان ثابتان.

والمطلوب: 1) تعيين مسار النقطة.

2) حساب السرعة العددية والتسارع العددي للنقطة.

3) تعيين راسم خطي الحركة.

الحل:

1) نحذف الزمن (الوسيط t) بين x و y فنجد:

$$t = \frac{y}{a} \Longrightarrow x = \frac{a^2 \frac{y^2}{a^2}}{2p} = \frac{y^2}{2p} \Longrightarrow \boxed{y^2 = 2px}$$

وهي معادلة المسار وتمثل معادلة قطع مكافئ محوره منطبق على $\vec{ox}$ وخارجته مبدأ الإحداثيات ووسيطه p.

2) لحساب السرعة العددية نشتق x و y بالنسبة للزمن:

$$x' = \frac{a^2 t}{p} \quad , \quad y' = a$$

$$v^2 = x'^2 + y'^2 = a^2\left[1 + \frac{a^2 t^2}{p^2}\right]$$

ولحساب التسارع نشتق x' و y' بالنسبة للزمن:

$$x'' = \frac{a^2}{p} \quad , \quad y'' = 0$$

فالتسارع العددي هو $\frac{a^2}{p}$.

3) لتعيين راسم الخطي

$$X = x' = \frac{a^2 t}{p}$$

$$Y = y' = a$$

وبالتالي راسم الخطي هو المستقيم $\boxed{Y = a}$ يوازي المحور ox.