كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة : **العاشرة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

جبر بول: (مقدمة):

جورج بول وهو رياضي من القرن التاسع عشر طوّر نظاماً يتعامل مع المنطق وفق أسس جبرية بحيث أنه يمكن توصيف أساسيات علم المنطق بلغة رياضية جبرية.

استُخرجت البنية الجبرية التي وضعها بول لعلم المنطق والذي أُطلق عليه لاحقاً جبر بول كأداة لتصميم الدارات الكهربائية من قبل (كلود شانون) عالم فيزياء وكنتيجة لعمله يستخدم جبر بول اليوم في تحليل وتصميم الدارات الالكترونية الخاصة بعمل الحاسب.

وضع أرسطو أسس النظام المنطقي ذو القيمتين T و F كمنهج للوصول إلى الحقيقة بدءاً من مجموعة من فرضيات في جبر بول نستخدم 0 و 1 للإشارة إلى قيمتي الحقيقة T و F حيث نترجم 0 و off و 1 و on في علوم الرياضيات والدارات الكهربائية.

تعريف: لتكن B مجموعة تحوي على الأقل عنصرين يرمز لهما بالرمز 0 و 1 ومعرّف عليها العمليات التالية:

عملية ثنائية: $B \times B \longrightarrow B$

عمليتان ثنائيتان: $(a,b) \longmapsto a+b$ ، $(a,b) \longmapsto a.b$

عملية أحادية: $a \longmapsto \bar{a}$

نقول عن البنية $(B, +, ., -, 0, 1)$ أنها تشكل جبر بول إذا تحققت فيها الشروط التالية:

1- العمليات +، . إبدالية: $\forall a,b \in B \quad a+b = b+a \;,\; a.b = b.a$

2- كل عملية توزيعية على الأخرى:

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

$$a+(b.c) = (a+b).(a+c)$$

3. العنصر o هو الحايد بالنسبة لـ + : $\forall a \in B \; ; \; a+o=a$

العنصر 1 هو الحايد بالنسبة لـ . : $\forall a \in B \; ; \; a.1=1.a=a$

4. من أجل كل $a \in B$ يوجد $b \in B$ بحيث $a+b=1$ و $a.b=o$ ضرب

يسمى b متمم a ويرمز له بـ $\bar{a}$

• إنّ أبسط القضايا المنطقية المزوّدة بعمليتي $\vee$ و $\wedge$ مع F باعتبارها o و T باعتبارها 1

ونفي القضية باعتبار التمام يشكل جبر بول : $\{$أبسط القضايا المنطقية$\}$ $B=L$

$o \equiv F \; , \; 1 \equiv T \; , \; \forall q \in L = B$

$q \wedge \neg q \equiv F \; , \; q \vee \neg q \equiv T$ لأنّ $\bar{q}=T$

• جبر بول ثنائي القيمة :

$B=\{a,b\}$ المزوّد بالعمليات التالية :

x	$\bar{x}$
a	b
b	a

+	a	b
a	a	b
b	b	b

.	a	b
a	a	a
b	a	b

وإذا رمزنا لـ $a=o$ و $b=1$ فيكون لدينا :

x	$\bar{x}$
o	1
1	o

+	o	1
o	o	1
1	1	1

.	o	1
o	o	o
1	o	1

• $B=\{o,1\}^n$ نعرّف العمليات حيث : $(B, +, ., o, 1, -)$ جبر بول :

$(x_i)+(y_i)=(x_i+y_i)$

$(x_i).(y_i)=x_i.y_i$

$(\bar{x_i})=(\bar{x_i})$ $\qquad o=(o)=(o,o,\dots,o)$

$1=(1)=(1,1,\dots,1)$

نحصل على جبر بول $(B^n, o, 1, +, ., -)$

TEL:0931497960 - Facebook Group : A to Z مكتبة

• مبدأ الثّنوية :

بحسب تعريف جبر بول $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ إنّ كل شرط من شروطه يتألف من قسمين متناظرين بالنّسبة لـ $(+)$ و $(\cdot)$ وبالنّسبة لـ 0 و 1 فإذا بادلنا كل عمليّة بالأخرى و بادلنا 0 و 1 نحصل على جبر بول الثنوي $(B^*, \cdot, +, ', 1, 0)$

وبالتّالي فإنّ كل عبارة بولينية صحيحة دائماً (نظرية) في جبر بول $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ لو بادلنا بين كل عملية ثنائية بالعملية الأخرى وبادلنا بين 0 و 1 لحصلنا على عبارة بولينية صحيحة دائماً (نظرية) في جبر بول الثنوي $(B^*, +, \cdot, ', 1, 0)$

هذه العبارة تسمّى ثنوية العبارة الاولى

مثال: $(p(x), \cup, \cap, \phi, X)$ إنّ ثنوية العبارة $f: A \cap X = A$ هي

$$f^*: A \cup \phi = A$$

f صحيحة $\Leftrightarrow$ f^* صحيحة.

• خواص جبر بول :

1. فاصية اللاعنو : من أجل كل $a \in B$ فإنّ $a + a = a$ & $a \cdot a = a$

الاثبات :

$$a = a + 0 = a + (a \cdot \bar{a}) = (a + a) \cdot (a + \bar{a})$$
$$= (a + a) \cdot 1 = a + a$$

إنّ $a \cdot a = a$ هي ثنوية العبارة الأولى منه بالتّالي صحيحة أيضاً

2. العنصر الماص : من أجل كل $a \in B$ فإنّ $a + 1 = 1$ و $a \cdot 0 = 0$

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 = 0 \cdot a + 0 \cdot \bar{a} = a(0 + \bar{a}) = a \cdot \bar{a} = 0$$

بصورة مشابهة إنّ العبارة الثانية هي ثنوية العبارة الأولى

أيضاً صحيحة $a + 1 = 1$

3. التّمّم وحيد : بفرض أنّ a له متممان $\bar{a}_1$ و $\bar{a}_2$ إذاً :

$$a \cdot \bar{a}_1 = 0 \quad , \quad a \cdot \bar{a}_2 = 0$$
$$a + \bar{a}_1 = 1 \quad , \quad a + \bar{a}_2 = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\bar{a}_1 = \bar{a}_1 + o = \bar{a}_1 + (a.\bar{a}_2) = (\bar{a}_1 + a)(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = (\bar{a}_2 + a)(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)$

$= \bar{a}_2 + a.\bar{a}_1 = \bar{a}_2 + o = \bar{a}_2$

إذاً المتمّم وحيد.

4. واضح أنّ $\bar{o} = 1$ و $\bar{1} = o$

5. $\bar{\bar{a}} = a$ (واضح من وحدانية المتمّم)

6. قانونا الامتصاص محققان:

$a + (a.b) = a$

$a.(a+b) = a$

الاثبات:

$a.(a+b) = (a+o)(a+b)$

$= a + (o.b) = a + o = a$

أنّ العبارة الثانية $a + (a.b) = a$ هي ثنوية الأولى فهي صحيحة أيضاً

7. قانونا التجميع محققان:

$(a+b) + c = a + (b+c)$

$(a.b).c = a.(b.c)$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة

مكتبة A TO Z

فرع 1
تجمع الكليات(كلية العلوم)

فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960